Université de Rennes 1
Département de Mathématiques

2011-2012

Licence de Mathématiques
“Calcul différentiel et fonctions holomorphes”

Feuille de TD n^{0}4

1. Inversion locale et fonctions implicites

Exercice 1.1.

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ et C l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) = 0$. En quels points (a,b) peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites ? Calculer la dérivée de la fonction implicite lorsqu'elle existe et écrire l'équation de la tangente à C.
2. Montrer que l'équation $e^x + e^y + x + y - 2 = 0$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite φ de x dont on calculera le développement limité à l'ordre 3 en 0.
3. Montrer que les équations $x + y - zt = 0,\ xy - z + t = 0$ définissent au voisinage de $(0,1)$ deux fonctions implicites $x = \varphi_1(z,t),\ y = \varphi_2(z,t)$ avec $\varphi_1(0,1) = 1$, dont on calculera les différentielles en ce point.

Exercice 1.2. Dans les exemples suivants décider en quels points les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont satisfaites :

1. $x^4 - xy^6 - 3y^4 = 0$
2. $\begin{cases} \sin(x+y) + z^2 = 2 \\ y^2 + xz^2 = 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y^5 + 3yz = x \\ z^6 + 4y^2z^2 = t \end{cases}$

Exercice 1.3. On considère $E = M_n(\mathbb{R})$, $F = GL(n,\mathbb{R})$ et l'application Ψ de $F \times E$ dans E définie par $\Psi(A,B) = AB - I$. Montrer à l'aide du théorème des fonctions implicites que $inv : A \in F \to A^{-1}$ est différentiable en tout point de F et calculer sa différentielle.

Exercice 1.4. On considère le système d'équations d'inconnues x et y :

$$x = \frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1, \quad y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que pour chaque $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution (x_0, y_0), et que la fonction ainsi définie est continue.
2. Montrer en considérant la fonction $F(x,y,t) = (x - \frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1, \quad y - \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2})$, que le système admet une unique solution $x = x(t),\ y = y(t)$ constituée de fonctions C^∞.
3. Donner un développement limité à l'ordre 2 de $(x(t), y(t))$ en $(0,0)$.

Exercice 1.5. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0,0)$. Montrer qu'il existe un intervalle I contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.

Exercice 1.6. Donner l'allure de $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \ x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y = 0\}$ au voisinage des points $(0,0)$ et $(1,1)$.

Exercice 1.7.

1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$. Montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ et que f^{-1} est différentiable en tout point de $f(\mathbb{R})$.
2. Soit f définie par $f(x) = x + x^2 \sin\frac{\pi}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
   Montrer que $f'(0)$ existe et est $\neq 0$, mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Expliquer.

Exercice 1.8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (f_1(x,y), f_2(x,y))$ de classe C^1 telle que $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = \dfrac{\partial f_2}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$. (On dit que f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann.)

1. Montrer que $\det J_f(x_0, y_0) = 0$ est équivalent à $Df(x_0, y_0) = 0$.
   En déduire que f admet un inverse local de classe C^1 en $(x,y) \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $Df(x,y) \neq 0$.
2. Montrer que si f est inversible alors f^{-1} vérifie les conditions de Cauchy-Riemann
3. Montrer par un contre-exemple que la conclusion de 1. n'est plus vraie si f ne vérifie pas les conditions de Cauchy-Riemann.

Exercice 1.9. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et I la matrice unité dans E. En considèrant $\varphi : E \to E$ telle que $\varphi(A) = A^2$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que toute matrice A vérifiant $||A - I|| < \alpha$ admette une racine carrée.

Exercice 1.10.

1. On considère l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par $(x, y, z) \to (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$. Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image que l'on précisera.

Exercice 1.11. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que il existe $k > 0$ avec $||f(x) - f(y)|| \geq k||x - y||$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. On va montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

1. Montrer que f est injective et que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermée dans $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $Df(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
3. En déduire que $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert-fermé de $\mathbb{R}^n$.

2. Extrema : méthode des multiplicateurs de Lagrange

Exercice 2.1. Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel λ, la nature des extrema de la fonction $f(x, y) = y(x^2 + y^2 - 2\lambda y)$.

Exercice 2.2. Soit $g(x, y, z) = xyz - 32$, $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ g(x, y, z) = 0\}$ et $f(x, y, z) = xy + 2yz + 2xz$. Déterminer $\min\{f(x, y, z) \ ; (x, y, z) \in \mathcal{S}\}$.

Exercice 2.3. Déterminer le point p du plan $\Sigma = \{(x, y, x + y) \ ; \ x, y \in \mathbb{R}\}$ qui réalise la distance $\operatorname{dist}(\Sigma \ , \ (1, 0, 0))$.

Exercice 2.4.

1. Déterminer les extrema de la fonction $f(x, y) = xy$ sur le cercle unité $S = \{(, x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; x^2 + y^2 = 1\}$.
2. Même question pour la fonction $f(x, y) = xy^2$.

Exercice 2.5. Déterminer le minimum et maximum de la fonction $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ sur l'intersection du plan $\Sigma = \{x + y + z = 0\}$ avec la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.6. Déterminer les extrema de la fonction $f(x, y, z) = 2x + 3y + 2z$ sur l'intersection du plan d'équation $x + z = 1$ avec le cylindre $\mathcal{Z} = \{x^2 + y^2 = 2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Exercice 2.7. Soit $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| = 1\}$ et $P = \{x \in \mathbb{R}^n | < x, v >= a\}$ où $v \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$ sont fixés. Déterminer la distance de l'hyperplan P à la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$.

Exercice 2.8. Soit $f : (t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(t, x, y) \in \mathbb{R}$ une application de classe C^2 telle que

(i) $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ soit définie positive en tout point

(ii) $(x,y) \mapsto f(0,x,y)$ atteint son minimum en un point (x_0,y_0).

Montrer que, si t est voisin de 0, l'application $(x,y) \mapsto f(t,x,y)$ atteint son minimum en $(x(t),y(t))$, où $t \mapsto (x(t),y(t))$ est une application de classe C^1 sur ce voisinage de 0.

3. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Exercice 3.1. Déterminer, parmi les sous-ensembles définis ci-dessous, ceux qui sont des sous-variétés :

1. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^3+y^3+z^3-3xyz=1\}$;
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; xy=0\}$;
3. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2+y^2+z^2=1 \; et \; x^2+y^2-x=0\}$;
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; y^2=x^3\}$;

Exercice 3.2.

1. Montrer que l'équation $xy+xz+yz+2x+2y-z=0$ définit au voisinage de $(0,0,0)$ une surface. Donner l'équation du plan tangent à l'origine.
2. Montrer que les équations $4xy+2xz+4y-z=0$ et $xy+xz+yz+2x+2y-z=0$ définissent au voisinage de l'origine une courbe. Déterminer l'espace tangent de cette courbe à l'origine.

Exercice 3.3. Soit $F=(F_1,...,F_k)$ une application C^1 d'un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^k$. Notons $M=\{x \in U \; ; \; F(x)=0\}$ et soit $a \in M$.

1. Établir l'équivalence des propriétés suivantes :
   - $DF(a)$ est surjective.
   - Les formes linéaires $DF_1(a),...,DF_k(a)$ sont linéairement indépendantes.
   - $\operatorname{Ker} DF(a) = \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} DF_i(a)$ est de dimension $m-k$.
2. Un point $a \in M$ est dit *point régulier* si $DF(a)$ est surjective. Montrer que l'ensemble des points réguliers de M est un ouvert de M.

Exercice 3.4. Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application C^∞ donnée par $f(A)=\det(A)$.

1. Montrer que $\lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{\det(I+\lambda X)-1}{\lambda} = \mathrm{tr}(X), \quad X \in M_n(\mathbb{R})$. En déduire $Df(I)(X)$.
2. En remarquant que $\frac{\det(A+\lambda X)-\det(A)}{\lambda} = \det(A)\frac{\det(I+\lambda A^{-1}X)-1}{\lambda}$, pour A inversible, calculer $Df(A)(X)$ dans ce cas.
3. Montrer que $Sl_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \; ; \; \det(A)=1\}$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1 dont l'espace tangent en I est

$$T_I Sl_n(\mathbb{R}) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \; ; \; \mathrm{tr}(X)=0\} \; .$$