Université de Rennes 1 2011-2012
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
“Calcul Différentiel et Fonctions Holomorphes"
Feuille de TD n^{0}3

1. Différentielles d'ordre supérieur

Exercice 1.1. On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0)$

Exercice 1.2. Soit $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application bilinéaire. Montrer que B est de classe C^∞ et déterminer les différentielles $D^k B$.

Exercice 1.3. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'opérateur **laplacien** Δ dans U est l'application qui associe à $f \in C^2(U,\mathbb{R})$ la fonction continue $\Delta f := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}$.

1. Monter que pour $f, g \in C^2(U,\mathbb{R})$ on a: $\Delta(fg) = g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle + f\Delta g$.
2. Montrer que pour $f \in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et $A \in O(n)$ i.e. ${}^tA.A = I_n$ on a

$$\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A$$

3. Une fonction $f \in C^2(U,\mathbb{R})$ est dite **harmonique** si $\Delta f = 0$.
   Montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques

   (i) $f(x,y) = (\cos(x) - \sin(x))e^y$.

   (ii) $g_n : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = \begin{cases} \ln \|x\|_2 & \text{si } n = 2 \\ \|x\|_2^{2-n} & \text{si } n > 2 \end{cases}$

Exercice 1.4. Soit $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

a) Soit $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ fixé. On définit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, par $g(t) = f(ta)$. Montrer $g'(t) = Df(ta)a$.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est positivement homogène de degré α si $f(tx) = t^\alpha f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrer, l'identité d'Euler suivante: pour tout $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$

$$Df(x)x = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x) \ .$$

c) Montrer la réciproque: si pour tout $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $Df(x)x = \alpha.f(x)$, alors f est positivement homogène de degré α.

Exercice 1.5. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application de classe C^2.

1. Soit $h \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application définie par $\varphi_h(x) = Df(x)(h)$. Justifier que

$$D^2 f(a)(k,h) = D\varphi_h(a)(k) \quad \text{pour tout} \ \ k \in \mathbb{R}^n \ .$$

2. Supposons que, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $f(tx) = t^2 f(x)$. Montrer que $D^2 f(0)(x,x) = 2f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Soit $a, h, k \in \mathbb{R}^n$ et soit $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ définie par $\Psi(t,s) = f(a+th+sk)$. Calculer $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial s}(0,0)$.

Exercice 1.6.

1. Trouver les applications $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = 0$.

2. Trouver les applications $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \ \ .$$

(Indication: poser $\varphi(u,v) = \frac{1}{2}(u+v, u-v)$ et $G = F \circ \varphi$).

Exercice 1.7. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application linéaire $Df(x)$ est un automorphisme orthogonal, i.e. $Df(x)$ est bijective et conserve le produit scalaire c-à-d

$$\langle Df(x)(h), Df(x)(k) \rangle = \langle h, k \rangle \quad \text{pour tout} \ \ h, k \in \mathbb{R}^n \ .$$

Montrer que l'application f est elle même un automorphisme orthogonal c-à-d une application affine dont l'application linéaire associée est un automorphisme orthogonal .

1. Déterminer la différentielle de $x \mapsto \langle Df(x)(h), Df(x)(k)\rangle$.

2. Vérifier que $A(h,k,l) = \langle Df(x)(h), D^2f(x)(k,l)\rangle$ est antisymétrique par rapport aux deux premières variables et symétrique par rapport aux deux dernières variables.

3. Montrer que $A(h,k,l) = 0$ pour tous $h,k,l \in \mathbb{R}^n$.

4. En déduire que l'application f est un automorphisme orthogonal c-à-d qu'il existe un automorphisme linéaire orthogonal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et un vecteur $A \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = Lx + A$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Formules de Taylor

Exercice 2.1. Déterminer le dévelopement de Taylor à l'ordre 2 au point $(1,1)$ de la fonction

$$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \frac{x-y}{x+y}.$$

Exercice 2.2. Déterminer approximativement la valeur de $1,05^{1,02}$ avec une erreur d'au plus $\epsilon < 10^{-2}$ (Indication: Appliquer une formule de Taylor à la fonction $f(x,y) = x^y$).

Exercice 2.3. Montrer que si $x = 1,32 \pm 10^{-2}$ et $y = 0,45 \pm 10^{-2}$, alors $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} = 0,14 \pm 10^{-2}$.

Exercice 2.4. Ecrire le développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de (0,0) pour la fonction $f(x,y) = \frac{e^x}{\cos y}$. En déduire la limite $\frac{e^x - (1+x)\cos y}{(x^2+y^2)\cos y}$ quand (x,y) tend vers (0,0).

Exercice 2.5. Soit $f(x,y)$ une fonction de classe C^2 au voisinage du cercle $x^2 + y^2 = 1$. On pose $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = a$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = b$. Pour tout nombre réel θ, soit $F(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$. Calculez $F''(0)$ en fonction de a et b.

Exercice 2.6.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application C^∞ et soit $n \geq 1$. Établir l'équivalence des propriétés suivantes:

   a) $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$.

   b) $f(x) = x^n g(x)$ avec $g \in C^\infty$.

2. Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et soit $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On suppose $f(0) = Df(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g_{i,j} \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ telles que $f(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j g_{i,j}(x)$.

Exercice 2.7. Déterminer les extremums (locaux et globaux) des fonctions suivante défines sur $\mathbb{R}^2$:

1. $f(x, y) = x^2 - y^2$.
2. $f(x, y) = x^3 - y^3$.
3. $f_\alpha(x, y) = x^3 + y^3 - \alpha xy$, ($\alpha \in \mathbb{R}$)
4. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$.

Exercice 2.8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 + \cos(x^2 + y^2)$.

1. Montrer que f est de classe C^2.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Montrer que f à un minimum absolu en $(0, 0)$.

Exercice 2.9. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \cos(x^2 + y^4)$ a un maximum local strict en $(0, 0)$.