Université de Rennes 1
Département de Mathématiques

2011-2012

Licence de Mathématiques
“Calcul Différentiel et Fonctions Holomorphes"
Feuille de TD n⁰2

1. Applications différentiables

Exercice 1.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Montrer que f est différentiable en $(a, b) \in U$ si et seulement si il existe deux réels λ et μ et une fonction $\varepsilon_\theta(\rho)$, vérifiant $\sup_{\theta\in\mathbb{R}} |\varepsilon_\theta(\rho)| \to 0$ lorsque $\rho \to 0$, tels que:

$$f(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta) = f(a, b) + (\lambda\rho\cos\theta + \mu\rho\sin\theta) + \rho\varepsilon_\theta(\rho).$$

Exercice 1.2.
Déterminer la plus grande partie de $\mathbb{R}^2$ sur laquelle la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sup(x^2, y^2)$ est continue, différentiable, de classe C^1.

Exercice 1.3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (x + y)\sqrt{x^2 + y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

et $f(0, 0) = 0$. Etudier la différentiabilité de f. Est-elle de classe C^1?

Exercice 1.4. Déterminer les matrices jacobiennes de
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 3x^2y + e^{xz^2} + 4z^3$ au point $(0, -1, 1)$,
$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(x, y, z) = (\ln(1 + x^2 + y^2), x^2 + y^2 - z^2, \cos(xz))$ et $h = f \circ g$ au point $(0, 0, 1)$.

Exercice 1.5. Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) = \dfrac{x^a y^b}{x^2 - xy + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles f est respectivement continue, différentiable, de classe C^1.

Exercice 1.6.

(i) Soit $f : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application qui associe à une matrice A son déterminant $f(A) = \det(A)$. Montrer qu'elle est de classe C^1.

(ii) Soit $H \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par $\phi(t) = \det(I + tH)$ est un polynôme en t de degré au plus n, dont on donnera les 2 termes de plus haut et plus bas degré. En déduire $\phi'(0)$ et $Df(I)(H)$.

(iii) Etendre la formule trouver en (ii) à $Df(A)(H)$ pour A inversible, puis pour A quelconque.

(iv) Montrer que l'application de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dans lui-même définie par: $A \mapsto {}^tAA$ est de classe C^1 et calculer sa différentielle.

2. Théorème des accroissements finis

Exercice 2.1. Soit $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 1\} \to \mathbb{R}$, définie par
$f(x, y) = \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right).$

Montrer que f est C^1, calculer Df. En déduire les valeurs de f.

Exercice 2.2.

1. Soit f une application réelle continue et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f'(x)$ ait une limite quand $x \to b^+$; alors f se prolonge en une fonction continue et dérivable à gauche au point b.

2. Soit f une application continue et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et de dérivée croissante; montrer que f est convexe sur I i.e. $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$ pour tous $x < y$ de I et $t \in [0, 1]$.
(Poser $z = (1-t)x + ty$ et appliquer le théorème des accroissement finis à $[x, z]$ puis $[z, y]$.)

Exercice 2.3.

1. Montrer que l'identité des accroissements finis n'est pas valable pour les fonctions vectorielles en considérant $f(x) = e^{ix}$.

2. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, Montrer que $f'(]a, b[)$ est connexe. Montrer que ceci est faux pour les fonctions vectorielles en considérant $f(x) = (x^2 \cos(\frac{1}{x}), x^2 \sin(\frac{1}{x}))$.

Exercice 2.4. (Lemme de Gronwall) Soient $u :]a, b[\to \mathbb{R}$ et $v :]a, b[\to \mathbb{R}$, v positive vérifiant: pour tout $t \in]a, b[$ on a $u(t) \leq A + \int_a^t u(s)v(s)\, ds$ où $A > 0$.

Montrer que pour tout $t \in]a, b[$, on a $u(t) \leq A.exp\left(\int_a^t v(s)\, ds\right)$.

indication: étudier la fonction $t \mapsto \frac{A + \int_a^t u(s)v(s)\, ds}{A.exp\left(\int_a^t v(s)\, ds\right)}$.

Exercice 2.5. Soit f une application différentiable de $]a, b[\subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$; on suppose qu'il existe $k \geq 0$ tel que $||Df(x)|| \leq k||f(x)||, \quad \forall x \in]a, b[$.

1. Montrer que tout $x_0, x_1 \in]a, b[$ on a $\|f(x_1)\| \leq e^{k|x_1 - x_0|} \|f(x_0)\|$.
(indcation: on pourra utiliser le lemme de Gronwall)

2. Soit $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = 0$. Montrer que f est identiquement nulle.
(*Indication :* on pourra montrer que $E = \{x \in]a, b[\ ;\ f(x) = 0\}$ est ouvert).

Exercice 2.6. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application différentiable de U dans $\mathbb{R}$ telle que l'on ait $||f'(x)|| \leq k|f(x)|, \quad \forall x \in U$.
Montrer que pour x assez voisin de $a \in U$, $|f(x)| \leq e^{k||x-a||} |f(a)|$.

(*Indication :* considérer l'application $t \in [0, 1] \to f(a + t(x - a))$).

Exercice 2.7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2 - y, x^2 + y^2)$ et $g = f \circ f$.

1. Montrer que f et g sont de classe C^1.

2. Calculer en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ la matrice jacobienne de f notée $J_f(x, y)$; calculer la matrice jacobienne de g au point $(0, 0)$ notée $J_g(0, 0)$.

3. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \overline{B_\rho((0, 0))}$ (la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon ρ) on a $||Dg(x, y)|| \leq \frac{1}{2}$.

4. Montrer que la fonction g admet un unique point fixe dans $\overline{B_\rho((0, 0))}$.

Exercice 2.8. On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par
$F(x, y) = (\cos x - \cos y,\ \sin x - \sin y)$; on note F^k l'application F composée k-fois

1. Montrer que $||DF(x, y)|| \leq \sqrt{2}$ pour tout (x, y).

2. En déduire que la suite récurrente définie par x_0, y_0 et pour $n \geq 1$
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\cos x_n - \cos y_n), \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin x_n - \sin y_n)$$
converge pour tout (x_0, y_0). Quelle est sa limite ?

Exercice 2.9. On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par
$$F(x, y) = (x^2 + y^2, y^2)\ .$$
Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \lim_{k\to\infty} F^k(x, y) = (0, 0)\}$.

1. Vérifier que $(x, y) \in \Omega$ si et seulement si $F(x, y) \in \Omega$.

2. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $||(x, y)|| < \delta \implies ||F'(x, y)|| \leq \frac{1}{2}$. En déduire que $(0, 0)$ est dans l'intérieur de Ω puis que Ω est un ouvert.

3. Utiliser l'homogénéité de F pour montrer que Ω est connexe.

Exercice 2.10. Soient E, F des espaces normés, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ une application continue.

1. Soit a un point de Ω. Si f est différentiable dans $\Omega \setminus \{a\}$ et si l'application $x \in \Omega \setminus \{a\} \mapsto Df(x)$ admet une limite $T \in \mathcal{L}(E, F)$ quand x tend vers a dans Ω, montrer que f est différentiable au point a et que $Df(a) = T$ (appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $g : x \mapsto f(x) - T(x)$).

2. Supposons f différentiable dans Ω. Montrer que $Df : \Omega \to \mathcal{L}(E, F)$ est continue en $a \in \Omega$ si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
$\|f(a+h) - f(a+k) - Df(a)(h-k)\| \leq \epsilon\|h-k\|$ si $\|h\| < \delta$ *et* $\|k\| < \delta$.

3. Supposons maintenant qu'il existe une application continue $x \in \Omega \mapsto T_x \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $x \in \Omega$ et tout $h \in E$
$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = T_x(h)\ .$$
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $Df(x) = T_x$ pour tout $x \in \Omega$. (On pourra considérer la fonction $g(t) = f(x + th) - tT_x(h)$.)