

Licence de Mathématiques
“Calcul Différentiel et Fonctions Holomorphes”
TD Fonctions Holomorphes

1. séries entières

Exercice 1.1. Décrire (géométriquement) les sous-ensembles de déterminés par:

- a) $|z - i| = |z + 1|$
- b) $|\Re(z)| = |z - 2|$
- c) $|z + i| + |z - 1| = 2$
- d) $|z - z_1| = |z - z_2|, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Exercice 1.2.

- a) Déterminer les parties réelle et imaginaire de $f(z) = \frac{1}{z^2}$.
- b) Est-ce que la limite de $\frac{z}{\bar{z}}$ existe, quand z tend vers 0 ?

Exercice 1.3.

Soit l'application $h(z) = \frac{z + i}{z - 1}$.

Déterminer les images par h des domaines suivants :

- $D_1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$
- $D_2 = \{z \in \mathbb{C}; \Re(z) > 0, \Im(z) > 0\}$
- $D_3 = \{z \in \mathbb{C}; 0 < \Im(z) < 1\}$

Exercice 1.4.

Soit la transformation homographique $h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, a, b, c et $d \in \mathbb{C}$. On pose $h(z) = Z$.

Calculer $Z\bar{Z} - 1$ en fonction de z et de \bar{z} .

Déterminer les transformations homographiques qui transforment l'axe des réels $\Im(z) = 0$ en le cercle unité $|Z| = 1$ et le demi-plan $\Im(z) > 0$ en le disque ouvert $|Z| < 1$.

Exercice 1.5. Trouver le domaine maximal de convergence des séries entières suivantes :

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n \cos n\theta, \quad (3) \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}.$$

Exercice 1.6. Développer en série entière les fonctions suivantes et préciser le domaine maximal de convergence ($a, b \neq 0$):

$$f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}, \quad g(z) = \frac{1}{(a-z)(b-z)}, \quad h(z) = \frac{z \sin a}{z^2 - 2(\cos a)z + 1}.$$

Exercice 1.7. Trouver les solutions de l'équation différentielle $(1+x^2)y'' - 2y = 0$ en commençant par chercher des solutions développables en série entière.

Exercice 1.8. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites de réels. Etablir les propositions suivantes :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} v_n ;$$

$$(\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n) \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} v_n.$$

Donner l'exemple de deux suites pour lesquelles la première inégalité est stricte.

Exercice 1.9. Déterminer le rayon de convergence des séries $\sum_{n \geq 0} a^n z^n$ ($a \in \mathbb{C}$) ; $\sum_{n \geq 0} e^{\sqrt{n}} z^n$; $\sum_{n \geq 0} z^n / n!$; $\sum_{n \geq 0} z^{2n}$; $\sum_{n \geq 0} z^{n!}$.

Comparer le rayon de convergence des séries $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} c_n z^{2n}$.

Si le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ est strictement positif et fini, quel est celui de $\sum_{n \geq 0} c_n z^{n^2}$?

Exercice 1.10. Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$ est supérieur ou égal au plus petit des rayons de convergence des séries $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$. Montrer par un exemple que l'inégalité peut être stricte.

Exercice 1.11.

- Déterminer à l'aide de la formule de Hadamard le rayon de convergence des séries suivantes :

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} e^n z^{n^2} \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n.$$

- Trouver le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ où

$$a_n = q^{n^2} (|q| < 1); \quad a_n = C_{kn}^n; \quad a_n = e^{n^\alpha} (0 < \alpha < 1).$$

2. Conditions de Cauchy-Riemann

Exercice 2.1. La fonction $f(z) = \bar{z}$ est-elle continue ? holomorphe dans \mathbb{C} ?

Exercice 2.2. En quels points la fonction $f(z) = z \Re z$ est-elle \mathbb{C} -différentiable ?
Même question pour $f(z) = \exp \bar{z}$.

Exercice 2.3. Soit f une fonction holomorphe d'un ouvert connexe (non vide), Ω de \mathbb{C} dans \mathbb{C} .

Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes

- a) f est constante.
- b) $\Re(f)$ est constante.
- c) $\Im(f)$ est constante.
- d) $|f|$ est constante.

En déduire que la fonction $g(z) = |z|$ n'est pas holomorphe .

Exercice 2.4.

Soit f une fonction holomorphe d'un ouvert connexe, Ω , de \mathbb{C} dans \mathbb{C} .

On pose pour tout élément $z = x + iy$ de \mathbb{C} , $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$.

On suppose qu'il existe des nombres réels a, b et c non tous nuls tels que $aP(x, y) + bQ(x, y) = c$ pour tout $z = x + iy \in \Omega$

Montrer que f est constante.

Exercice 2.5. Soient W un ouvert de \mathbb{C} et f une fonction holomorphe dans W .

On pose $W^* = \{z \in \mathbb{C}; \bar{z} \in W\}$.

Montrer que la fonction g de W^* dans \mathbb{C} , définie par $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ est une fonction holomorphe dans W^* .

Exercice 2.6. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe W de \mathbb{C} .

Montrer que $\Delta(|f|^2) = 4|f'(z)|^2$.

En déduire que $|f(z)|$ est une fonction holomorphe si et seulement si f est constante.

Exercice 2.7. Montrer que les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires s'écrivent

$$f'_r + \frac{i}{r} f'_\theta = 0$$

Exercice 2.8. Soit f la fonction définie sur \mathbb{C} par

$$\begin{cases} f(z) = e^{-1/z^4} & \text{si } z \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f vérifie les équations de Cauchy-Riemann en tout point de \mathbb{C} mais n'est pas holomorphe dans \mathbb{C} .

Exercice 2.9. Déterminer les zéros de $\sin(z)$.

Exercice 2.10. Dans quelle région de \mathbb{C} , $\ln(z^2)$ est-elle une fonction holomorphe?

Exercice 2.11. Montrer les inégalités suivantes, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|\exp(z) - 1| \leq \exp(|z|) - 1 \leq |z| \exp(|z|)$$

Exercice 2.12.

1. Pour $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(z) = x + iy^2$. Montrer que f est \mathbb{R} -différentiable sur \mathbb{C} et calculer sa différentielle. Existe-t-il un ouvert U de \mathbb{C} telle que $f|_U \in H(U)$?
2. Même question avec $f(z) = |\sin z|$.

Exercice 2.13.

1. Soit $U = \{z = x + iy \in \mathbb{C} ; -\pi < x < \pi, y \in \mathbb{R}\}$. Soit $P(x, y) = \frac{\sin x}{\cos x + \cosh y}$ pour $z \in U$. Montrer qu'il existe $f \in H(U)$ unique telle que $f(0) = 0$ et $P = \operatorname{Re} f$.
2. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose $P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.
Donner une CNS pour qu'il existe $f \in H(\mathbb{C})$ telle que $P = \operatorname{Re} f$. Sous cette condition trouver alors toutes les applications $f \in H(\mathbb{C})$ telles que $P = \operatorname{Re} f$.

Exercice 2.14. On dit que deux fonctions réelles $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont conjuguées harmoniques si elles vérifient les équations de Cauchy-Riemann.

1. Montrer que si u et v sont conjuguées harmoniques, alors u et v sont harmoniques.
2. Trouver les conjuguées harmoniques des fonctions harmoniques suivantes dans les ouverts indiqués :
 - (a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ sur \mathbb{C}
 - (b) $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
 - (c) $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ sur
 - i. $\mathbb{C} \setminus \{x + iy \mid y = 0, x \leq 0\}$
 - ii. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Exercice 2.15. Trouver des domaines de définition Ω (le plus grand possible) et des fonctions holomorphes $f = u + iv$ sur Ω étant donné la partie réelle u ou la partie imaginaire v .

1. $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}$

$$2. u = e^x(x \cos y - y \sin y) + 2 \sin x \operatorname{sh} y + x^3 - 3xy^2 + y$$

$$3. v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$$

Exercice 2.16. Soit $f(z) = u + iv$ une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω . Montrer que les familles de courbes $u(x, y) = c_1$ et $v(x, y) = c_2$ sont orthogonales ; plus précisément, montrer qu'en tout point d'intersection $z_0 = x_0 + iy_0$ de deux de ces courbes tel que $f'(z_0) \neq 0$, leurs tangentes respectives sont perpendiculaires.

Exercice 2.17. Montrer que si $f(z)$ est holomorphe dans un ouvert connexe Ω et si $f'(z) \neq 0$ en tout point de Ω , alors la transformation $w = f(z)$ conserve les angles.

Exercice 2.18. Montrer qu'il n'existe pas de détermination holomorphe du logarithme de z sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tout entier. (On raisonnera par l'absurde et on exhibera ainsi une application continue injective du cercle unité dans \mathbb{R}).

Exercice 2.19. On rappelle qu'une fonction complexe f a une racine n ième holomorphe dans un ouvert connexe Ω s'il existe $g \in H(\Omega)$ telle que $g^n(z) = f(z)$.

1. Montrer que si f admet un logarithme holomorphe dans Ω , elle y admet des racines de tous ordres; montrer, sur un exemple, qu'une fonction holomorphe f peut admettre une racine sans admettre de logarithme (holomorphe).
2. Si g_1, g_2 sont deux fonctions continues de Ω connexe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, telles que $g_1^n = g_2^n$ pour un entier $n \geq 1$, montrer que $g_1 = e^{\frac{2i\pi k}{n}} g_2$ où k est un entier et $g_1 = g_2$ dès que les fonctions coïncident en un point.

Exercice 2.20.

1. Montrer que $\operatorname{Re}(\cos z) > 0$ si $|\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2}$. En déduire une détermination holomorphe du logarithme de $\cos z$ dans $\{|\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2}\}$.
2. Montrer que l'on peut définir une fonction holomorphe $f(z) = \operatorname{Log} \frac{1+iz}{1-iz}$ sur l'ouvert $U = \mathbb{C} \setminus S$ où $S = \{ix ; |x| \geq 1\}$.

Exercice 2.21. Montrer que

$$\operatorname{Arg}(x + iy) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

En déduire que la fonction Arg est \mathbb{R} -différentiable sur l'ouvert Ω

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid y = 0, x \leq 0\}$$

et calculer sa différentielle.

Exercice 2.22. Si $z = x + iy$ avec x et y réels, montrer que l'on a

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y \\ |\cos z|^2 &= \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y \end{aligned}$$

En déduire les zéros de $\sin z$ et $\cos z$ dans \mathbb{C} .

Exercice 2.23. Résoudre les équations $e^z = -3$, $\cos z = 2$, $\sin z = 2$, $\tan z = 2i$, $\operatorname{ch} z = 1/2$ de la manière suivante :

1. en identifiant les parties réelles et imaginaires
2. en utilisant le logarithme

Exercice 2.24.

1. En utilisant la détermination principale du logarithme, on définit les fonctions $z \mapsto z^{1/2}$, $z \mapsto (1-z)^{1/3}$, $z \mapsto ((1-2i)z)^{2i/5}$. Donner leur domaine de définition.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une détermination continue de $z^{1/n}$. Montrer que $f(z)^n = z$ sur son domaine de définition.

Exercice 2.25. On considère $f(z) = \sqrt{z^2} = (z^2)^{1/2}$ définie à l'aide de la détermination principale du logarithme.

1. Trouver le domaine de définition et donner une expression explicite de f .
2. Peut-on prolonger f par continuité sur un ouvert plus grand ?
3. Mêmes questions en prenant la détermination $\log z = \ln z + 2i\pi$.

3. Formule de Cauchy

Exercice 3.1. Calculer $\int_{\gamma} (z-a)^n dz$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, où $\gamma(t) = a + e^{it}$ et $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 3.2. Calculer $\int_{\gamma} e^z dz$, où $\gamma(t) = e^{it}$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 3.3. Soit $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Montrer que $\left| \int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz \right| \leq \pi e$.

Exercice 3.4. Soit $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Montrer que $\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{\pi}{3}$.

Exercice 3.5. Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe f dans $\mathbb{C} - \{0\}$ telle que $f'(z) = \frac{1}{z}$.

Exercice 3.6. a) Soit γ un chemin fermé de \mathbb{C} .

On pose $Ind_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dt}{t - z}$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ (où γ^* est le support de γ).

Montrer que $Ind_{\gamma}(a) = Ind_{\gamma}(b) \implies \int_{\gamma} \frac{dz}{(z - a)(z - b)} = 0$.

b) En déduire que $\int_{C(0,2)} \frac{dz}{1+z^2} = 0$.

Exercice 3.7. a) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$. On pose $\gamma(t) = a \cos(t) + ib \sin(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$.

Calculer les intégrales : $I = \int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ et $J = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}$.

Exercice 3.8. Soient f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω et $a, b \in D(O, R) \subset \Omega$.

Evaluer $\int_{C(O,R)} \frac{f(z)}{(z - a)(z - b)} dz$.

En déduire le théorème de Liouville i.e. toute fonction holomorphe et bornée sur \mathbb{C} , est constante.

Exercice 3.9. Soient f une fonction holomorphe dans \mathbb{C} , et $R, A, B, \alpha \in \mathbb{R}^+$ tels que : $|f(z)| \leq A + B|z|^{\alpha}$ pour tout z de module plus grand que R . Montrer que f est un polynôme.

Exercice 3.10. Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon infini. Montrer que pour $r > 0$ et $n \geq 0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt$$

En déduire que s'il existe des réels $k > 0$ $R > 0$ tel que $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ pour tout z de module $\geq R$, alors f est un polynôme.

Exercice 3.11. On se propose de calculer $I = \int_{-\pi}^{\pi} \ln |re^{i\theta} - a| d\theta$, où $0 < r < |a|$.

1. Vérifier que I est bien définie.

- On considère f la fonction définie sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ par $f(z) = \frac{1}{z} \text{Ln}(1 - \frac{z}{a})$, où Ln est la détermination principale du logarithme sur Ω . Montrer que f est holomorphe sur un ouvert contenant le cercle $\{z = r e^{i\theta}\}$.
- En déduire $I = 2\pi \ln|a|$.

Exercice 3.12. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ de module $\neq 0, 1$, et $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta) d\theta}{\lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1}$.

- Vérifier que I est bien définie.
- On considère f définie par $f(z) = \frac{z^n}{(z - \lambda)(z - \lambda^{-1})}$; en calculant l'intégrale de f sur le cercle unité, trouver la valeur de I (distinguer les deux cas $|\lambda| > 1, |\lambda| < 1$).

Exercice 3.13. Soit U un ouvert de \mathbb{C} contenant \bar{D} et $f \in H(U)$. On note γ le paramétrage de ∂D par $t \in [0, 2\pi] \rightarrow e^{it}$.

- Calculer $I_1 = \int_{\gamma} (2 + z + \frac{1}{z}) \frac{f(z)}{z} dz$ et $I_2 = \int_{\gamma} (2 - z - \frac{1}{z}) \frac{f(z)}{z} dz$.
- En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2(\frac{\theta}{2}) d\theta$ et $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \sin^2(\frac{\theta}{2}) d\theta$.
- Pour $|a| \neq 1$, évaluer $I(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\overline{f(z)}}{z - a} dz$.

Exercice 3.14.

- Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , F et G deux fonctions holomorphes dans Ω et $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin tel que $\gamma^* \subset \Omega$. Montrer que

$$\int_{\gamma} F(z)G'(z) dz = F(\gamma(b))G(\gamma(b)) - F(\gamma(a))G(\gamma(a)) - \int_{\gamma} F'(z)G(z) dz$$

- Calculer $\int_{\gamma} (z+2)e^{iz} dz$, où γ est l'arc de parabole $\gamma(t) = t + i \frac{t^2}{\pi^2}$ joignant $(0,0)$ à $(\pi, 1)$.

Exercice 3.15. En évaluant $\int_C e^z dz$ sur le cercle unité, montrer que

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\theta + \sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \sin(\theta + \sin \theta) d\theta = 0$$

Exercice 3.16. Calculer

$$\int_{\gamma} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z},$$

où $\gamma(t) = e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$) et $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \cos^n t \, dt$.

Exercice 3.17. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z} \, dz$ où $\gamma(t) = e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$)

2. $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z} \, dz$ où $\gamma(t) = e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$)

3. $\int_{\gamma} \frac{\cos z^2}{z} \, dz$ où $\gamma(t) = e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$)

4. $\int_{\gamma} \frac{e^{\pi z}}{z^3 + z} \, dz$ où $\gamma(t) = 2e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$)

5. $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^n}$ ($n \in \mathbb{Z}$), où γ est un chemin fermé ne passant pas par a

6. $\int_{\gamma_r} \frac{3z^2 - 12z + 11}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6} \, dz$, où $\gamma_r(t) = re^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$)

7. $\int_{\gamma} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n \, dz$, $n \in \mathbb{N}^*$, où $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$)

Exercice 3.18. Pour $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, on désigne par C_n^k le coefficient binomial. Pour $r > 0$, soit $c_r: t \mapsto re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

1. Montrer que

$$C_n^k = \frac{1}{2i\pi} \int_{c_r} (1+z)^n \frac{dz}{z^{k+1}}.$$

En déduire que $C_{2n}^n \leq 4^n$.

2. Montrer que

$$C_{2n}^n = \frac{1}{2i\pi} \int_{c_r} \left(\frac{1}{z} + 2 + z\right)^n \frac{dz}{z}$$

(on pourra utiliser 1.). En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_{2n}^n \frac{1}{5^n} = \frac{1}{2i\pi} \int_{c_r} \frac{dz}{3z - 1 - z^2} = \sqrt{5},$$

à condition que $r_1 < r < r_2$, où $r_1 < r_2$ sont les deux racines de $3z - 1 - z^2 = 0$.

3. Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c_r} (1+z)^n \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z} = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2.$$

En déduire que

$$\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

4. Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c_1} \frac{(z-1)^{2n}(z+1)^n}{z^{2n+1}} dz = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k C_{2n}^k.$$

Montrer que si $z \in c_1^*$, $|z-1|^2|z+1| \leq \frac{16}{9}\sqrt{3}$. En déduire que

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k C_{2n}^k \leq \left(\frac{16}{9}\sqrt{3}\right)^n.$$

Exercice 3.19.

1. Montrer que $\int_0^{2\pi} e^{re^{it}} dt$ est indépendant de $r > 0$.
2. Montrer que $\int_0^{2\pi} \ln(1 - re^{it}) dt$ est indépendant de $r \in]0, 1[$ (ln désigne la branche principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$).

Exercice 3.20. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe Ω contenant le disque unité fermé et $\gamma(t) = e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$). Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left(\frac{f(z)}{z-a} + \frac{ag(z)}{az-1} \right) dz = \begin{cases} f(a) & \text{si } |a| < 1 \\ g(1/a) & \text{si } |a| > 1 \end{cases}$$

Soient k et $m \in \mathbb{R}$.

Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(mx) - \cos(kx)}{x^2} dx$.

En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$.

Exercice 3.21.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |\alpha| < \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Calculer } \max_{|\arg(z) \leq \alpha} |z^n e^{-z}|$$

Exercice 3 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$I_\alpha = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^{\alpha-1} dx \text{ est-elle convergente?}$$

Calculer pour ces valeurs I_α .

Exercice 3.22.

Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} et A un droite de \mathbb{C} .

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que la restriction de f à $\Omega - A$ soit holomorphe.

Montrer que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe.

Exercice 3.23.

A) (i) Soit $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.

Soit $a \in D$.

Montrer que $\phi_a : D \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-z\bar{a}}$ est un isomorphisme de D dans lui-même.

ii) Soit $f \in \mathcal{H}(D)$.

Montrer que si $|f(z)| \leq 1$ dans D alors

$$|f(z) - f(0)| \leq |z| |1 - f(z)\bar{f}(0)|.$$

(ind.: on pourra utiliser $\phi_{f(0)} \circ f$.)

En déduire que, $|f'(0)| < 1$ ou bien $f(z) = z.e^{i\alpha}$, pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

B) i) Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / \Re(z) < 0\}$.

Soit $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\psi(z) = \frac{z+1}{z-1}$, montrer que ψ est un isomorphisme de Ω sur D .

ii) Soit $f \in \mathcal{H}(D)$.

Montrer que si $\Re f(z) < 0$ dans D alors

$$|f'(0)| \leq -2\Re f(0).$$

(ind.: on pourra utiliser $\psi \circ f$.)

C) Soit $f \in \mathcal{H}(D)$.

Montrer que si $0 < |f(z)| < 1$ dans D alors

$$|f'(0)| \leq \frac{2}{e}.$$

(ind.: on pourra utiliser $\log f(z)$)

Exercice 3.24.

Soient $f \in \mathcal{H}(D)$ et $M > 0$ telles que $f(0) = 0$ et $|f'(z)| \leq M \forall z \in D$.

Montrer que $|f'(z) - f'(0)| \leq 2M|z|$ et que $|f(z) - zf'(0)| \leq M|z|^2$

(ind.: on pourra utiliser $g(z) = \frac{f'(z) - f'(0)}{2M}$)

Exercice 3.25.

- a) Démontrer que si $|z| \leq 1$, $|z'| \leq 1$ alors, $|e^z - e^{z'}| < e|z - z'|$.
 b) Si $\Re(a) > 1$, montrer que l'équation $e^{z-a} = z$ admet une solution unique z telle que $|z| < 1$.
 c) Démontrer que cette solution est une fonction holomorphe de a si $\Re(a) > 1$.

Exercice 3.26.

Soit ϕ une application holomorphe du disque pointé $0 < |z| < 1$ dans la couronne $1 < |z| < 2$.

- a) Démontrer que ϕ se prolonge en une application holomorphe du disque $|z| < 1$ dans \mathbb{C} .
 b) Démontrer que ϕ ne peut être un isomorphisme du disque pointé $0 < |z| < 1$ sur la couronne $1 < |z| < 2$.

Exercice 3.27. Quel est le nombre de zéros (avec leur multiplicité) des polynômes suivants dans les disques indiqués:

- b) $F(z) = z^6 - 6z + 10$ de module < 1 .
 c) $F(z) = z^4 - 3z^3 - 1$ de module < 2 .
 d) $F(z) = z^3 + z - 1$ de module $< \frac{1}{2}$.

Exercice 3.28. Quel est le nombre de zéros de $F(z) = z^4 - 5z - 1$ polynôme dans la couronne $1 < |z| < 2$.

Exercice 3.29. Montrer que les zéros de $F(z) = z - ae^z$, avec $0 < a < \frac{1}{e}$ tels que $|z| < 1$ sont réels.

Exercice 3.30. Soit P un polynôme unitaire de degré n de $\mathbb{C}[z]$. On pose $Q(z) = p(z) - z^n$. Montrer qu'il existe z sur le cercle unité tel que $|P(z)| \geq 1$.

- a) Montrer que l'équation $e^{-z} = 2 - z$ possède une unique solution de partie réelle > 0 .
 b) Montrer que, si $\Re(a) > 1$, alors l'équation $e^{z-a} = z$ possède une unique solution dans $D(0, 1)$.

Exercice 3.31. Soit $r > 0$. Montrer que, pour n assez grand, $P_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ n'a pas de zéros pour $|z| \leq r$.

Exercice 3.32. Quel est le nombre de zéros de $z^4 + 3z - ch(z)$ dans $D(0, 1)$?

Exercice 3.33.

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω connexe par arcs contenant le disque fermé $\bar{D}(0, R)$, $R > 0$.

- a) Soient a et b deux nombres complexes avec $0 < |a| < |b| < R$.

Calculer selon les valeurs de r , ($0 < r \leq R$ et $r \neq |a|$, $r \neq |b|$) l'intégrale

$$\int_{C+(0,r)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz.$$

b) On suppose de plus que f vérifie $\forall z \in \Omega : |f(z) - 1| < 1, f(0) = 1$.

(i) Quelle est l'expression de f si $\Omega = \mathbb{C}$?

(ii) Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe g définie sur Ω vérifiant $\forall z \in \Omega : \exp(g(z)) = f(z), g(0) = 0$

(iii) Calculer $\int_{C^+(0,r)} \frac{g(z)}{z} dz$ et en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta$.

Exercice 3.34. Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \rightarrow +\infty$ quand $|z| \rightarrow +\infty$.

1. Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros dans \mathbb{C} notés z_1, \dots, z_k .
2. En déduire que f est un polynôme. (Pour cela considérer $f(z)/P(z) = g(z)$ où $P(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_k)$ et montrer que $1/g$ est entière).

Exercice 3.35. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω contenant 0. Montrer que :

1. Si $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ pour n assez grand alors $f(z) = \frac{z}{z+1}$ sur $\Omega \cap D(0, 1)$.
2. Si $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{2n})$ pour n assez grand alors f est constante sur Ω .
3. Si $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n+1})$ pour n assez grand alors f est constante sur Ω .
4. $f(\frac{1}{n}) = 2^{-n}$ pour n assez grand est impossible.

Exercice 3.36. Soit f une fonction entière ; on pose, pour $r \in \mathbb{R}_+^*$,

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

1. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M(r)}{r^{p+1}} = 0$$

Montrer qu'alors f est un polynôme de degré au plus p .

2. On suppose qu'il existe $R \geq 0, K > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que

$$|z| > R \implies |f(z)| \leq K|z|^p$$

Montrer qu'alors f est un polynôme de degré au plus p . Montrer que si de plus $R = 0$ alors f est un monôme de degré p .

3. En déduire que si f vérifie

$$\forall z \in \mathbb{C}, |f'(z)| \leq |z|$$

alors f est de la forme $f(z) = a + bz^2$ avec $|b| \leq 1/2$.

Exercice 3.37. Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour $r < R$, soit $\gamma_r: t \mapsto r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ et

$$I(r) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} |f(z)|^2 \frac{dz}{z}.$$

1. Montrer que $I(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$.
2. En déduire une nouvelle démonstration des inégalités de Cauchy et montrer que si f n'est pas un monôme, ces inégalités sont strictes.
3. En considérant $f(z) = 1/(1-z)^2$, montrer que pour $r < 1$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1-2r \cos t + r^2)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 r^{2n-2}.$$

Exercice 3.38. Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité ouvert D vérifiant

$$\forall z \in D, |f(z)| < \frac{1}{1-|z|}.$$

Montrer que les coefficients a_n du développement $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ vérifient

$$\forall n \geq 1, |a_n| < (n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < (n+1)e \text{ et } |a_0| < e.$$

Exercice 3.39. Existe-t-il des fonctions f holomorphes sur $D(0, 1)$ telles que pour tout entier $n > 0$

1. $f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$?
2. $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$?
3. $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^3}$?

Exercice 3.40. Déterminer explicitement pour $a \in \mathbb{R}$

$$\max_{|z| \leq 1} |z^2 + 2aiz + 1|.$$

Exercice 3.41. Soient P_1, P_2, \dots, P_k k points du plan. On désigne par $d(A, B)$ la distance entre deux points A et B du plan. Soit D un ouvert connexe borné du plan. Montrer que le sup de $\prod_{1 \leq j \leq k} d(M, P_j)$ sur D est atteint sur la frontière de D .

Exercice 3.42. Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} contenant le disque fermé $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$, et f une fonction holomorphe sur Ω telle que $f(z) \in \mathbb{R}$ si $|z - z_0| = r$. Montrer que f est constante (considérer e^{if}).

Exercice 3.43. Soient f et g deux fonctions holomorphes et ne s'annulant pas dans un ouvert connexe Ω contenant le disque unité fermé. On suppose que pour $|z| = 1$, $|f(z)| = |g(z)|$ et que $f(0)$ et $g(0)$ appartiennent à \mathbb{R}_+^* . Montrer que $f = g$ sur Ω .

Exercice 3.44. Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Soit D le disque unité fermé.

1. Supposons que f n'a pas de zéros dans D . Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = k$ pour tout z de \mathbb{C} .
2. Soit a_1, \dots, a_n (pourquoi un nombre fini ?) les zéros de f dans D , chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. En étudiant la fonction

$$g(z) = f(z) \prod_{j=1}^n \frac{1 - \bar{a}_j z}{z - a_j}$$

montrer qu'il existe $k \in \mathbb{C}$, $|k| = 1$, et $n \in \mathbb{N}$ tels que $f(z) = kz^n$.

Exercice 3.45. [Théorème des trois cercles d'Hadamard]

Soit f une fonction holomorphe dans un domaine contenant la couronne fermée constituée par les $z \in \mathbb{C}$ tels que $r_1 \leq |z| \leq r_2$ (où $0 < r_1 < r_2$). On pose $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ pour $r_1 \leq r \leq r_2$.

1. Montrer qu'il existe un nombre réel α tel que $r_1^\alpha M(r_1) = r_2^\alpha M(r_2)$.
2. Montrer que

$$M(r) \leq M(r_1)^{\frac{\ln r_2 - \ln r}{\ln r_2 - \ln r_1}} M(r_2)^{\frac{\ln r - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1}}$$

(on appliquera le principe du maximum à la fonction $z^p f(z)^q$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, puis on considèrera une suite (p_n, q_n) , $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$, telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n/q_n = \alpha$).

4. Calcul des résidus

Exercice 4.1. Déterminer les points singuliers des fonctions suivantes :

$$\text{a) } f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^4 - 1} \quad \text{b) } g(z) = \frac{z^2 + 1}{z(z - i)^3}$$

Calculer les résidus correspondants.

Exercice 4.2. Déterminer les points singuliers des fonctions suivantes :

$$\text{a) } f(z) = \frac{e^z}{z^2 + 1} \quad \text{b) } g(z) = \frac{1 - e^z}{1 + e^z}$$

Exercice 4.3. Déterminer la série de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z - 1)(z - 2)}$ dans les couronnes suivantes:

- $0 < |z| < 1$
- $1 < |z| < 2$
- $2 < |z|$

Exercice 4.4.

- Déterminer les développements en série de Laurent de $f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$ dans les domaines $D = D(0, 1)$, $C_1 = \{1 < |z| < 3\}$ puis $C_2 = \{|z| > 3\}$.
- Déterminer les développements en série de Laurent de $f(z) = \frac{z}{z-1}e^z$ dans les domaines $C_1 = \{|z| < 1\}$ puis $C_2 = \{|z| > 1\}$.

Exercice 4.5. Développer les fonctions suivantes en série de Laurent dans chacun des ouverts donnés

- $f(z) = \frac{1}{(z - a)^k}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) dans $|z| < |a|$ et dans $|z| > |a|$;
- $f(z) = \frac{1}{z(z - a)}$ dans $0 < |z| < |a|$ et dans $|a| < |z|$;
- $f(z) = \frac{1}{(z - a)(z - b)}$ ($0 < |a| < |b|$) dans $0 < |z| < |a|$; $|a| < |z| < |b|$; $|b| < |z|$;
- $f(z) = z^2 \exp(z^{-1})$ dans $0 < |z|$.
- $f(z) = \exp(z + z^{-1})$ dans $0 < |z|$.

Exercice 4.6. Déterminer les points singuliers des fonctions suivantes, puis donner la nature de ces points singuliers (singularité supprimable pôle d'ordre n , singularité essentielle isolée, accumulation de points singuliers).

1) $z \mapsto \frac{1}{z(z^2+4)^2}$, 2) $z \mapsto \frac{1}{\exp(z)-1} - \frac{1}{z}$, 3) $z \mapsto \sin \frac{1}{1-z}$, 4) $z \mapsto \exp \frac{z}{1-z}$, 5) $z \mapsto \cotanz - \frac{1}{z}$, 6) $z \mapsto \frac{1}{\sin z - \sin a}$, 7) $z \mapsto \exp \left(\tan \frac{1}{z} \right)$.

Exercice 4.7. Exhiber des fonctions n'ayant dans le plan complexe que les singularités suivantes:

1. un pôle triple en 0, un pôle simple en 1 et un point singulier essentiel en i et $-i$.
2. un point singulier essentiel en tout entier.

Exercice 4.8. Déterminer les singularités isolées a des fonctions f suivantes et calculer $\text{Res}(f, a)$.

$$\begin{array}{lll}
 1. z \mapsto \frac{1}{z^3 - z^5} & 2. z \mapsto \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} & 3. z \mapsto \exp(z + z^{-1}) \\
 4. z \mapsto \frac{\sin(2z)}{(z + 1)^3} & 5. z \mapsto \cos\left(\frac{z^2 + 4z - 1}{z - 3}\right) & 6. z \mapsto z^n \sin\left(\frac{1}{z}\right)
 \end{array}$$

Exercice 4.9. Montrer que si P est un polynôme de degré ≥ 2 , la somme des résidus de $\frac{1}{P}$ aux zéros de P est nulle.

Exercice 4.10. Soit U un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} , f une fonction holomorphe sur $U \setminus S$ où S est une partie fermée discrète de U . Montrer que f a une primitive sur $U \setminus S$ si et seulement si pour tout point s de S , le résidu de f au point s est nul.

Exercice 4.11. Calculer les intégrales suivantes, où les chemins fermés simples γ sont parcourus dans le sens direct.

1. $\int_{\gamma} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz$ où γ est le cercle $|z-2| = \frac{1}{2}$;
2. $\int_{\gamma} \frac{\exp z}{z^2(z-9)^2} dz$ où γ est le cercle $|z| = 1$;
3. $\int_{\gamma} \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz$ où γ est le cercle $|z| = 1$;
4. $\int_{\gamma} \sin^2\left(\frac{1}{z}\right) dz$ où γ est le cercle $|z| = r$;

5. $\int_{\gamma} (z^2 + z + 1)^{-1/2} dz$ où γ est le cercle $|z| = r \neq 1$.

Exercice 4.12. Calculer $\int_C (x + 2y) dx + (y - 2x) dy$ le long de l'ellipse C définie par $x = 4 \cos \theta$, $y = 3 \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Exercice 4.13. Calculer $\int_C (z^2 + 3z) dz$ le long des chemins suivants :

1. le cercle $|z| = 2$ du point $(2,0)$ au point $(0,2)$
2. le segment de droite joignant les points $(2,0)$ et $(0,2)$
3. le contour polygonal formé par les segments de droite joignant $(2,0)$ à $(2,2)$ et $(2,2)$ à $(0,2)$

Exercice 4.14. Calculer $\int_C \frac{dz}{(z-a)^n}$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, où C est un cercle de centre a .

Exercice 4.15.

1. Soit $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$. Montrer que $\int_{\gamma_R} f(z) dz$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$, où $\gamma_R(t) = Re^{it}$ ($t \in [0, \pi]$).
2. Dédurre de 1. la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

Exercice 4.16. Si γ est l'arc de courbe $\gamma(t) = t + i(t^3 - 3t^2 + 4t - 1)$ joignant les points $(1,1)$ et $(2,3)$, trouver la valeur de

$$\int_{\gamma} (12z^2 - 4iz) dz$$

Exercice 4.17.

1. Calculer l'intégrale $I = \int_{\gamma} \bar{z} dz$ où γ est le chemin joignant le point $(1, 1)$ au point $(2, 4)$ suivant la parabole $y = x^2$; puis le segment joignant ces points. Qu'obtient-on avec $\int_{\gamma} z dz$?
2. Soit $\gamma = e^{2i\pi t}$, $t \in [0, 1]$ et f continue sur γ^* le cercle unité dans \mathbb{C} . Comparer $\int_{\gamma} \overline{f(z)} \frac{dz}{z^2}$ et $\int_{\gamma} f(z) dz$.

Exercice 4.18. Soit f une fonction continue du quart de plan $\{x + iy; x, y \geq 0\}$ dans \mathbb{C} et C le quart de cercle paramétré par $\{re^{it}; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}$ avec $r > 0$. On pose $M(r) = \sup_{z \in C} |f(z)|$. Montrer que si $\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = 0$, alors $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_C f(z)e^{iz} dz = 0$.

Exercice 4.19. Calculer par la méthode des résidus les intégrales suivantes:

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 4 \sin(t)}$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \sin^2(t)}$$

$$c) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{1 + x^2} dx$$

$$d) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{(1 + x^2)^2} dx$$

$$e) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{1 - x^2}{1 + x^2} dx$$

Exercice 4.20. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a > 1, b > \sqrt{2}$. Calculer les intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 - \cos(x)}$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{a + \cos(x)} dx$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{b + \cos(x) + \sin(x)}$$

Exercice 4.21. Soit f une fonction holomorphe et non constante de \mathbb{C} dans \mathbb{C} .

Montrer que $f(\mathbb{C})$ est dense dans \mathbb{C} .

Exercice 4.22. Calculer par la méthode des résidus les intégrales suivantes:

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1 + x^2} dx$$

$$b) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1 + x^2)} dx$$

$$c) \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{1 + x^2} dx$$

Exercice 4.23. Soient n un entier et a un réel tels que $n > a + 1 > 0$.

Calculer l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{1 + x^n} dx$.

Exercice 4.24. Calculer les intégrales suivantes: $I_1 = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ et

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 4.25. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha e^{it}}{(1+x^2)} dx$ est-elle absolument convergente?

Calculer pour ces valeurs l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \cos(x - \frac{\pi\alpha}{2})}{(1+x^2)} dx.$$

Exercice 4.26.

1. Calculer les résidus aux différents pôles de la fonction $f(z) = \frac{z^2+z+1}{z(z^2+1)^2}$; $f(z) = \frac{1}{1+z+\dots+z^{n-1}}$; $f(z) = \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}$.

2. Montrer que si $f(z) = (z-a)^{-n}g(z)$ où g est holomorphe dans Ω ouvert contenant a , alors $\text{Res}(f, a) = \frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$.

Trouver les pôles et résidus des fonctions suivantes : $\frac{1-\cos z}{z^3}$, $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, $\frac{1}{(1+z^2)^n}$.

Exercice 4.27. [Intégrales de fonctions trigonométriques] Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{3-2\cos t} dt$ (poser $z = e^{it}$).

Exercice 4.28. [Intégrales de fractions rationnelles sans pôle sur \mathbb{R}]

1. Calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^{2n}}$, $n \geq 2$, en intégrant $\frac{1}{1+z^{2n}}$ sur un demi-cercle.

2. Calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

Exercice 4.29. [Utilisation du logarithme]

1. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$, en intégrant $\frac{\ln z}{1+z^3}$ sur un cercle privé de \mathbb{R}^+ , log désignant ici la détermination du logarithme avec coupure sur \mathbb{R}^+ .

2. En choisissant la même détermination du logarithme et le même contour, calculer simultanément les intégrales $I = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^4}$ et $J = \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{Lnx}}{1+x^4} dx$.

(Intégrer cette fois $\frac{(\ln z)^2}{1+z^4}$.)

3. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Ln}x}{1+x^n} dx$, $n \geq 2$, en intégrant $\frac{\text{Ln}z}{1+z^n}$ sur un secteur épointé bien choisi.

Exercice 4.30.

Soit a un réel > 0 et $\text{Log}z$ la détermination principale du log sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. En intégrant la fonction $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)\text{Log}z}$ sur un contour $\Gamma_{\varepsilon,R}$ constitué du cercle de rayon R évitant le demi-axe \mathbb{R}^- , montrer que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(\text{Ln}^2x+\pi^2)} = \frac{\pi}{2a(\text{Ln}^2a+\pi^2/4)} - \frac{1}{1+a^2}.$$

Exercice 4.31. [Calcul d'intégrales semi-convergentes]

1. Calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx$ en intégrant $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ sur un contour bien choisi.
2. Calculer de même $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2-1}{x^2+1} \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice 4.32. [Calcul de transformées de Fourier]

1. Calculer la transformée de Fourier de $\frac{1}{1+x^4}$ en intégrant $\frac{e^{itz}}{1+z^4}$ sur un demi-cercle dans un demi-plan bien choisi.
2. Calculer $I(m,a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{(1+x^2)(x^2+a^2)} dx$ en distinguant les cas $a=1, a \neq 1$. Vérifier que $I(m,1) = \lim_{a \rightarrow 1} I(m,a)$.
En déduire sans nouveaux calculs la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin mx}{(1+x^2)^2} dx$.

Exercice 4.33. Calculer

1. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t}$ ($a > 1$);
2. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos t)^2}$ ($a > b > 0$);
3. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 3t}{1 - 2a \cos t + a^2} dt$ ($a \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$);

$$4. \int_0^{2\pi} \exp(\cos t) \cos(nt - \sin t) dt \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Exercice 4.34.

Dans cet exercice, on justifiera soigneusement chaque passage à la limite. Calculer les intégrales :

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx$$

$$2. \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$3. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \quad (\text{on pourra considérer la fonction } \frac{1-e^{2ix}}{x^2})$$

$$4. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx \quad (\text{on pourra utiliser le rectangle de sommets } -R, R, R+i\pi, -R+i\pi)$$

$$5. \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^2} dx$$

$$6. \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx$$

Exercice 4.35.

Soit $f(z) = z^5 + 5z^3 + z - 2$. Montrer que f a trois de ses zéros dans le disque $D(0, 1)$ et tous ses zéros dans le disque $D(0, 3)$. **Exercice 4.36.** Soit γ_n

le chemin dont l'image γ_n^* est le rectangle de sommets $\pm(n + \frac{1}{2}) \pm in$ parcouru une fois dans le sens direct. Evaluer pour $a \notin \mathbb{Z}$

$$\int_{\gamma_n} \frac{\pi \cotan(\pi z)}{(z+a)^2} dz.$$

Montrer que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} \frac{\pi \cotan(\pi z)}{(z+a)^2} dz = 0.$$

(On pourra établir auparavant que, si z appartient à γ_n^* et si n est assez grand, on a $|\cotan(\pi z)| \leq 2$.)

$$\text{En déduire que } \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(a+n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi a)} \right)^2.$$