Examen
lundi 12 avril 2010
Durée 2h

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés
La présentation et la rédaction seront prises en compte dans la notation.

[1]

Exercice 1. (4pt) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (e^x, 2y - x + 1)$.

1. Montrer que f est de classe C^∞.
2. Soit (x_0,y_0) un point de $\mathbb{R}^2$, calculer la matrice Jacobienne de f en (x_0,y_0).
3. Montrer que f est un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$ sur son image.

Exercice 2. (4pt) Soit dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 - y^3 + z^2 & = 1 \\ xyz + 2y & = 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que $(-1,1,1)$ est solution du sytème.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et deux fonctions de classe C^∞, $\varphi :]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ et $\psi :]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ tels que : $\varphi(-1) = \psi(-1) = 1$ et pour tout $x \in]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[$, $(x,\varphi(x),\psi(x))$ est une solution du système.
3. Calculer $\varphi'(-1)$ et $\psi'(-1)$.

Exercice 3. (3pt) Soit $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $u(x,y) = 2x^3 - 6xy^2$.

1. Montrer que u est une fonction harmonique i.e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
2. Déterminer toutes les fonctions harmoniques $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que $u + iv$ soit holomorphe et écrire $u + iv$ comme une fonction de z où $z = x + iy$.

1.

tourner la page svp

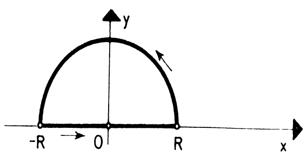
Exercice 4. (4pt)

1. Donner le développement en série entière de la fonction $z \mapsto \sin z$.
2. Soit f la fonction définie dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ par $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^4}$.
   Déterminer, les coefficients $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ permettant d'écrire f sous la forme de série de Laurent $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^{-n}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_{C^+(0,1)} f(z)\,dz$, où $C^+(0{,}1)$ est le cercle unité orienté dans le sens positif.
4. Montrer que f n'admet pas de primitive dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
5. La fonction g définie par $g(z) = \dfrac{\sin z}{z^5}$ admet-elle une primitive dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

Exercice 5. (5pt) On considère la fonction de la variable complexe

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4}.$$

1. Déterminer les points singuliers de F ainsi que le résidu de F en ces points.
2. Pour $R > 2$, on considère le lacet γ_R (parcouru dans le sens positif) constitué du segment de droite joignant $-R$ à R, suivi du demi-cercle de centre 0 et de rayon R joignant R à $-R$ (voir figure)



   Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_R} F(z)\,dz = \frac{\pi e^{-2}}{2}$.
3. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\,dx$ est convergente.
4. Déterminer I.