Corrigé
lundi 12 avril 2010

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (e^x, 2y - x + 1)$.

1. Montrer que f est de classe C^∞.
   Réponse : Les composantes de l'application f sont de classe C^∞ donc f est de classe C^∞.
2. Soit (x_0,y_0) un point de $\mathbb{R}^2$, calculer la matrice Jacobienne de f en (x_0,y_0).
   Réponse : $J_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} e^{x_0} & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
3. Montrer que f est un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$ sur son image.
   Réponse : D'après le théorème d'inversion globale, f est un difféomorphisme sur son image si et seulement si f est un difféomorphisme locale et bijective.
   i) En tout point (x_0,y_0), le déterminant de la jacobienne est égal à $\det \begin{pmatrix} e^{x_0} & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2e^{x_0} \neq 0$, **d'après le théorème d'inversion locale, f est un difféomorphisme local de classe C^∞ en tout point** (x_0,y_0).
   ii) $f(x_0,y_0) = f(x_1,y_1) \iff \begin{cases} e^{x_0} = e^{x_1} \\ 2y_0 - x_0 + 1 = 2y_1 - x_1 + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = x_1 \\ y_0 = y_1 \end{cases}$
   f est donc injective et par suite une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur son image $f(\mathbb{R}^2)$. Ainsi, f est un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$ sur son image.

Exercice 2. Soit dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 - y^3 + z^2 & = 1 \\ xyz + 2y & = 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que $(-1,1,1)$ est solution du sytème.
   Réponse : $(-1)^2 - 1^3 + 1^2 = 1$ **et** $(-1).1.1 + 2.1 = -1 + 2 = 1$.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et deux fonctions de classe C^∞, $\varphi :]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ et $\psi :]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ tels que : $\varphi(-1) = \psi(-1) = 1$ et pour tout $x \in]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[$, $(x,\varphi(x),\psi(x))$ est une solution du système.
   Réponse : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x^2 - y^3 + z^2 - 1, xyz + 2y - 1)$.
   f est de classe C^∞, car ses composantes sont de classe C^∞ (sont polynomiales).
   $D_{(y,z)}f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y^2 & 2z \\ xz + 2 & xy \end{pmatrix}$ **d'où** $\det D_{(y,z)}f(-1,1,1) =$

$\det\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$. **Alors, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe $\varepsilon > 0$ et deux fonctions de classe C^∞, $\varphi :]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ et $\psi :]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ tels que : $\varphi(-1) = \psi(-1) = 1$ et pour tout $x \in]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[$, $f(x,\varphi(x),\psi(x)) = 0$, i.e. $(x,\varphi(x),\psi(x))$ une solution du système.**

3. Calculer $\varphi'(-1)$ et $\psi'(-1)$.
   Réponse : Puisque $\begin{cases} x^2 - \varphi(x)^3 + \psi(x)^2 & = 1 \\ x\varphi(x)\psi(x) + 2\varphi(x) & = 1 \end{cases}$ **en dérivant par rapport à** x **on obtient p**
   $$\begin{cases} 2x - 3\varphi'(x)\varphi(x)^2 + 2\psi'(x)\psi(x) = 0 \\ \varphi(x)\psi(x) + x\varphi'(x)\psi(x) + x\varphi(x)\psi'(x) + 2\varphi'(x) = 0 \end{cases}$$
   d'où pour $x = -1$, sachant que $\varphi(-1) = \psi(-1) = 1$, on aura $\begin{cases} -2 - 3\varphi'(-1) + 2\psi'(-1) = 0 \\ 1 + \varphi'(-1) - \psi'(-1) = 0 \end{cases}$
   Ainsi $\varphi'(-1) = 0$ et $\psi'(-1) = 1$

Exercice 3. Soit $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $u(x,y) = 2x^3 - 6xy^2$.

1. Montrer que u est une fonction harmonique i.e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
   Réponse : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x$ **et** $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -12x$ **d'où** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
2. Déterminer toutes les fonctions harmoniques $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que $u + iv$ soit holomorphe et écrire $u + iv$ comme une fonction de z où $z = x + iy$.
   Réponse : $f = u + iv$ holomorphe, en dérivant le long de des réels et en utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, on obtient : pour $z = x + iy$ $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = (6x^2 - 6y^2) - i(12xy) = 6(x^2 - y^2 + 2ixy) = 6z^2$. **D'où** $f(z) = 2z^3 + c$, **avec** $c = a + ib \in \mathbb{C}$. **Comme** $z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$, $f(z) = 2x^3 - 6xy^2 + i(6x^2y - 2y^3) + a + ib$ **ainsi** $v(x,y) = 6x^2y - 2y^3 + b$, $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.

1. Donner le développement en série entière de la fonction $z \mapsto \sin z$.
   Réponse :
   $$\sin z = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
2. Soit f la fonction définie dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ par $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^4}$.
   Déterminer, les coefficients $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ permettant d'écrire f sous la forme de série de Laurent $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^k + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^{-n}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Réponse :
$f(z)=\frac{\sin z}{z^4}=\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!z^4}=\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{z^{2k-3}}{(2k+1)!}=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{6z}+\frac{z}{120}+\dots$.
En posant $p=k-2$, on obtient $f(z)=\dfrac{1}{z^3}-\dfrac{1}{6z}+\displaystyle\sum_{p=0}(-1)^p\frac{z^{2p+1}}{(2p+5)!}$

Ainsi $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^k+\sum_{n=1}^{+\infty}a_{-n}z^{-n}$ **dans** $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ **avec**

$$a_n=\begin{cases}\frac{(-1)^p}{(2p+5)!} & \textbf{si } n=2p+1\\ 0 & \textbf{sinon}\end{cases}$$

et $a_{-n}=\begin{cases}\frac{-1}{6} & \textbf{si } n=1\\ 1 & \textbf{si } n=3\\ 0 & \textbf{sinon}\end{cases}$

3. Calculer $\displaystyle\int_{C^+(0,1)}f(z)\,dz$, où $C^+(0,1)$ est le cercle unité orienté dans le sens positif.
Réponse :
Le cercle unité est un compact, et la convergence uniforme de la série permet d'intervertir les signes $\int$ **et** $\sum$ **pour obtenir :**
$\displaystyle\int_{C^+(0,1)}f(z)\,dz=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\int_{C^+(0,1)}z^k\,dz+\sum_{n=1}^{+\infty}a_{-n}\int_{C^+(0,1)}z^{-n}\,dz=a_{-1}\int_{C^+(0,1)}\frac{1}{z}\,dz=a_{-1}2i\pi=\frac{-i\pi}{3}$.
on utilise le fait que $\int_{C^+(0,1)}z^n\,dz=\begin{cases}0 & \textbf{si } n\neq-1,\\ 2i\pi & \textbf{si } n=-1.\end{cases}$

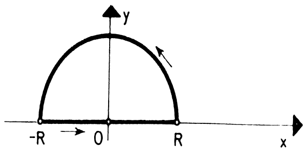
4. Montrer que f n'admet pas de primitive dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
Réponse :
Si f admettait une primitive dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, son intégrale le long de tout lacet contenu dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, mais d'après ce qui précède $\displaystyle\int_{C^+(0,1)}f(z)\,dz=\frac{-i\pi}{3}\neq0$,
Donc, f n'admet pas de primitive dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

5. La fonction g définie par $g(z)=\dfrac{\sin z}{z^5}$ admet-elle une primitive dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$?
Réponse :
En opérant de la même façon que pour f, on trouve
$g(z)=\frac{\sin z}{z^5}=\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{z^{2k-4}}{(2k+1)!}$
Comme $z\mapsto(-1)^k\frac{z^{2k-4}}{(2k+1)!}$ **admet une primitive à savoir** $z\mapsto(-1)^k\frac{z^{2k-3}}{(2k+1)!.(2k-3)}$ **alors la fonction** $G(z)=\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{z^{2k-3}}{(2k+1)!.(2k-3)}$ **est une primitive de g on obtient $G'(z)=g(z)$ en dérivant terme à terme la série** $G(z)=\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{z^{2k-3}}{(2k+1)!.(2k-3)}$
Ainsi $g(z)=\frac{\sin z}{z^5}$ **admet une primitive dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.**

Exercice 5. On considère la fonction de la variable complexe

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4}.$$

1. Déterminer les points singuliers de F ainsi que le résidu de F en ces points.
   <u>Réponse :</u>
   Les points singuliers de F sont les zéros du numérateurs, $z^2+4=0$ à deux racines simples $2i$ et $-2i$. Ainsi F à deux pôles, on détermine les résidus par la formule
   $Res(F,2i) = \frac{e^{iz}}{(z^2+4)'}|_{z=i} = \frac{e^{iz}}{2z}|_{z=2i} = \frac{e^{-2}}{4i}$ **de même on trouve** $Res(F,-2i) = \frac{e^{2}}{-4i}$
2. Pour $R > 2$, on considère le lacet γ_R (parcouru dans le sens positif) constitué du segment de droite joignant $-R$ à R, suivi du demi-cercle de centre 0 et de rayon R joignant R à $-R$ (voir figure)



   Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_R} F(z)\,dz = \frac{\pi e^{-2}}{2}$.
   <u>Réponse :</u>
   On applique le théorème des résidus
   $\begin{cases} \textbf{au domaine (simplement connexe) } \mathbb{C}, \\ \textbf{au lacet simple } \gamma_R \\ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \{2i,-2i\}) \end{cases}$
   comme γ_R ne passe par les pôles $2i$ et $-2i$, car $R > 2$ et seul $2i$ est à l'intérieur de γ_R on aura :
   $\displaystyle\int_{\gamma_R} F(z)\,dz = 2i\pi Res(F,2i) = 2i\pi\frac{e^{-2}}{4i} = \frac{\pi e^{-2}}{2}.$
3. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\,dx$ est convergente.
   <u>Réponse :</u>

   On a : $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2+4}$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\left|\frac{\cos x}{x^2+4}\right| \leq \frac{1}{x^2+4}$ et $\frac{1}{x^2+4}$ est une intégrale de Riemann convergence, d'où $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2+4}$ est absolument convergente donc convergente.

4. Déterminer I.
   <u>**Réponse :**</u>
   Si on prend la paramétrisation du demi-cercle Γ_R **donnée par** $\Gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$, **on a** $dz = \Gamma'_R(t)dt = iR^{it}dt$.
   Comme $|f(z)| \leq \frac{e^{-\Im m(z)}}{|z|^2-4} \leq \frac{1}{R^2-4}$ **et que la longueur de** Γ_R **est égale à** πR **d'où**

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+4}\, dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2-4} \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Alors , $\frac{\pi e^{-2}}{2} = \displaystyle\int_{\gamma_R} F(z)\, dz = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+4}\, dz + \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+4}\, dx$, **par passage à la limite lorsque** $R \to +\infty$ **on obtient :**

$$\frac{\pi e^{-2}}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4}\, dx$$

   La partie réelle nous donne $2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\, dx = \frac{\pi e^{-2}}{2}$ **d'où** $\boxed{I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\, dx = \frac{\pi e^{-2}}{4}}$
   Remarque : **La partie imaginaire donne** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+4}\, dx = 0$ **(ce qui est prévisible car la fonction est impaire).**