Université de Rennes 1
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
"Calcul Différentiel et Fonctions Holomorphes"

Examen du 11 juin 2007 (Durée 2 h)
(documents et calculettes ne sont pas autorisés)

Exercice 1 :

On considère l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto f(x, y) := (x + 2y)^2 - \cos(y^2).$$

1. Pour quelles valeurs de p on peut affirmer que $f \in C^p(\mathbf{R}^2)$.
2. Ecrire soigneusement les différentielles première et seconde de f en tout point $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.
3. Déterminer tous les points de $\mathbf{R}^2$ en lesquels la différentielle première est identiquement nulle.
4. Déterminer tous les extrema locaux de f. Bien préciser s'il s'agit de minima ou maxima et dire aussi s'ils sont extrema globaux.
5. Discuter selon $a \in \mathbf{R}$ la structure de l'ensemble des points

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ f(x, y) = a\} \ .$$

a) On déterminera pour quelles valeurs de a c'est un sous-variété de $\mathbf{R}^2$ de dimension 1.
b) On précisera ce qui se passe dans les autres cas.

Exercice 2 :

1. Donner une définition de la fonction e^z pour z complexe.
2. En utilisant la définition donnée démontrer que

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

pour tous nombres complexes z_1 et z_2.

Tourner SVP

Exercice 3 :

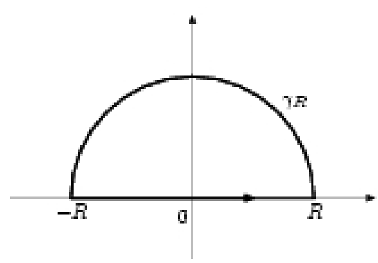
1. Trouver le développement en série de Laurent (en puissances de z) de la fonction

$$f(z) = \frac{1 - e^z}{z^3}.$$

Pour quelles valeurs de z cette série est-elle convergente?
2. Trouver les résidus de la fonction $f(z)$ aux points $z = 0$ et $z = 1$.

Exercice 4 :

Soit $R > 1$. On note γ_R le chemin fermé correspondant au demi cercle de centre 0 et de rayon R parcouru entre 0 et π, suivi du segment $[-R, R]$. Le tout parcouru une seule fois et dans le sens trigonométrique (ou sens positif) :



1. Déterminer les pôles de la fonction définie par :

$$f(z) = \frac{z^4}{1 + z^6}$$

et calculer ses résidus.
2. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^4}{1 + z^6} dz.$$

3. Déterminer la limite, lorsque R tend vers l'infini, de l'intégrale sur le demi-cercle.

4. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{1 + x^6}\, dx.$$