Université de Rennes 1
Année 2008-2009

Calcul différentiel et fonctions holomorphes

Examen
lundi 22 juin 2009
Durée 2h

L'épreuve est composée de 4 exercices indépendants
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1. Soit $f :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}$.

1. Déterminer les extrema de la restriction de f au carré $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.
2. Déterminer le maximum de la restriction de f à la branche d'hyperbole $H = \{(x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[|\, xy = 1\}$.

Exercice 2.

Soit l'application $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, définie par

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que Φ est continue. Est-elle différentiable ?
2. Rappeler l'énoncé du théorème d'inversion locale.
3. On pose $U = \{(x,y) | 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ et on désigne par f la restriction de Φ à U c'est-à-dire : pour tout $(x,y) \in U$ on a $f(x,y) = \left(\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.
   Montrer que f est un difféomorphisme local de classe C^∞ au voisinage de tout point de U.
4. Montrer que $f(U) = U$.
5. L'application f est-elle un difféomorphisme de U sur U ?

Exercice 3. Calculer $\int_\gamma \frac{e^z \sin z}{z(z-1)^2} dz$ dans chacun des cas suivants :

1. γ est le cercle de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$.
2. γ est le cercle de centre 1 et de rayon $\frac{1}{2}$.
3. γ est le carré de sommets : $-2+2i$, $-2-2i$, $2-2i$ et $2+2i$.

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2t}{4 - 2\sin t}\, dt.$
2. $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+4)^2}\, dx.$