Corrigé
Examen du lundi 22 juin 2009

Exercice 1.

1. L'ensemble $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 1 \leq y \leq 2\}$ est un carré, pour déterminer le maximum absolu M et le minimum absolu m de la restriction de la fonction f à C on doit déterminer les extrema locaux à l'intérieur du carré et sur le bord du carré formé des cotés $C_1 = \{(x,1); 1 \leq x \leq 2\}$, $C_2 = \{(2,y); 1 \leq y \leq 2\}$, $C_3 = \{(x,2); 1 \leq x \leq 2\}$ et $C_4 = \{(1,y); 1 \leq y \leq 2\}$.

   (a) à l'intérieur du carré C, on a

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = D_1 f(x,y) = f(x,y)\left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x+y}\right)$$
   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = D_2 f(x,y) = f(x,y)\left(\frac{1}{y(y+1)} - \frac{1}{x+y}\right)$$

   D'où $Df(x,y) = (0,0)$ entraîne $(x,y) = (1,1)$, donc f a un seul point critique dans U, à savoir $(1,1)$.
   Le calcul des dérivées secondes au point critique donne :

   $$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{16} & \frac{1}{32} \\ \frac{1}{32} & \frac{-1}{16} \end{pmatrix}$$

   Comme $\det H_f(1,1) = \frac{3}{32} > 0$ et $trH_f(1,1) = -\frac{1}{8} < 0$, $H_f(1,1)$ est définie négative, d'où f atteint son maximum (local) en $(1,1)$ et vaut $f(1,1) = \frac{1}{8}$.

   (b) La restriction de f au côté C_1 est $f(x,1) = \frac{x}{2(x+1)^2}$, sa dérivée vaut $\frac{1-x}{2(x+1)^3}$, s'annule en $x = 1$, négative sur $[1,2]$. Donc $f(x,1)$ atteint son maximum en $x = 1$ et vaut $f(1,1) = \frac{1}{8}$ et son minimum en $x = 2$ et vaut $f(2,1) = \frac{1}{9}$.
   De même pour le côte C_4.

   (c) La restriction de f au côté C_3 est $f(2,y) = \frac{2y}{3(y+1)(y+2)}$, sa dérivée vaut $\frac{2(2-y^2)}{3(y+1)^2(y+2)^2}$ est positive lorsque $1 \leq y \leq \sqrt{2}$, et négative sur $\sqrt{2} \leq y \leq 2$.
   Donc $f(2,y)$ atteint son maximum en $(2,\sqrt{2})$ et vaut $f(2,\sqrt{2}) = \frac{1}{6+2\sqrt{2}}$ et son minimum en $(2,1)$ et vaut $f(2,1) = \frac{1}{9}$.
   De même pour le côte C_2.

Conclusion : Le maximum global M (respectivement le minimum global m) de la restriction de la fonction f à C est $M = \frac{1}{8}$ (resp. $m = \frac{1}{9}$).

2. La restriction de f à H a pour expression $g(x) = f(x,\frac{1}{x}) = \frac{x^2}{(x+1)^2(x^2+1)}$, sa dérivée est $\frac{2x^2(1-x^2)}{(x+1)^3(x^2+1)^2}$, s'annule en $x = 1$, positive sur $]0,1]$ et négative sur $[1,+\infty[$.
   Donc, f atteint son maximum au point $(1,1)$ et vaut $f(1,1) = \frac{1}{9}$.

Exercice 2.

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. On note les composantes de Φ par f_1 et f_2 .
   f_1 et f_1 sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ étant composée, de fonctions de classe C^∞.
   D'autre part, $|f_1(x,y)| = \left|\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$ et
   $|f_2(x,y)| = \left|\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$ entraîne que
   $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0$ et par suite que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \Phi(x,y) = \Phi(0,0)$.
   Donc Φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   On a déja vu que Φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$; elle n'est pas différentiable en $(0,0)$, car f_1 n'admet pas de dérivées partielle en $(0,0)$.
2. Théorème d'inversion locale
3. Comme $J_\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x^3+3xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & -\frac{3x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \frac{2y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{2x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$; on a $\det J_\Phi(x,y) = 2 \neq 0$ pour $(x,y) \in U$, et d'après le théorème d'inversion locale, Φ est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U.
4. Si on pose $u = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $v = \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ alors $u^2+v^2 = x^2+y^2$ donc $(x,y) \in U$ entraîne $(u,v) = \Phi(x,y) \in U$, i.e. $\Phi(U) \subset U$.
   Inversement, soit $(u,v) \in U$, le système $\begin{cases} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & = u \\ \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & = v \end{cases}$ entraîne $\begin{cases} x^2-y^2 & = u\sqrt{u^2+v^2} \\ x^2+y^2 & = u^2+v^2 \end{cases}$
   ou encore $\begin{cases} 2x^2 & = u\sqrt{u^2+v^2}+u^2+v^2 \\ 2y^2 & = u^2+v^2-u\sqrt{u^2+v^2} \end{cases}$
   Ce système admet donc au moins une solution, qui est bien dans U (car $u^2+v^2 = x^2+y^2$), d'où $U \subset \Phi(U)$.

5. L'application Φ n'est pas un difféomorphisme de U sur U, car elle n'est pas bijective, en effet $\Phi(\frac{3}{2},0) = \Phi(-\frac{3}{2},0)$.
   Remarque : On peut aussi voir que $\Phi(r\cos\theta,r\sin\theta) = (r\cos 2\theta,r\sin 2\theta)$, par suite deux points d'un même cercle diamétralement opposés ont même image, donc Φ n'est pas injective.

Exercice 3. On pose $f(z) = \frac{e^z \sin z}{z(z-1)^2}$, f a deux singularités à savoir $z = 1$ et $z = 0$.

1. Comme $\lim\limits_{z\to 0} zf(z) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^z \sin z}{(z-1)^2} = 0$, f a une singularité apparente en $z = 0$ et c'est l'unique singularité à l'intérieur du disque $D(0,\frac{1}{2})$, d'après le théorème des résidus :
$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi Res(f,0) = 0$$
2. Comme, $\lim_{z\to 1}(z-2)^2 f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{e^z \sin z}{z} = e^1 \sin 1 \neq 0$, f a un pôle d'ordre 2 en $z = 1$, et c'est l'unique singularité à l'intérieur du disque $D(1,\frac{1}{2})$, d'après le théorème des résidus : $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi Res(f,1)$
$$\begin{aligned} Res(f,1) &= \lim_{z\to 1}[(z-1)^2 f(z)]' = \lim_{z\to 1}\left(\frac{e^z \sin z}{z}\right)' \\ &= \lim_{z\to 1} \frac{e^z(\sin z + \cos z)z - e^z \sin z}{z^2} = e\cos 1 \end{aligned}$$
   D'où $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^2 \sin z} dz = 2i\pi e\cos 1.$
3. Comme, $f(z)$ a deux singularité à l'intérieur du rectangle, à savoir $z = 1$ et $z = 0$, d'après le théorème des résidus : $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi(Res(f,1) + Res(f,0))$.
   D'où $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z \sin z}{z(z-1)^2} dz = 2i\pi\,(e\cos 1 - 0) = 2i\pi e\cos 1.$

Exercice 4.

1. $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+4)^2}\,dx.$
   Remarque : Comme $\frac{|xe^{ix}|}{(x^2+4)^2} \leq \frac{1}{x^2+4} \leq \frac{1}{x^2+1}$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \pi$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{(x^2+4)^2}\,dx$ converge. D'autre part, $\frac{x\sin x}{(x^2+4)^2} = \Im m(\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2})$, on va donc calculer $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+4)^2}\,dx = \Im m\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{(x^2+4)^2}\,dx\right).$

On pose $f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^2+4)^2}$.

La fonction $f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^2+4)^2}$, a deux pôles d'ordre 2, (les racines de $(z^2+4)^2 = 0$), à savoir les points $2i$ et $-2i$

Pour $R > 2$, on considère le lacet γ_R formé du segment $[-R,R]$ et du demi-cercle suprérieur Γ_R de centre 0 et de rayon R.

Il n'y a que le pôle $z = 2i$ qui soit à l'intérieur du domaine délimité par le lacet γ_R et d'après le théorème des résidus $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2i\pi Res(f,2i)$ c-à-d

$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx = 2i\pi Res(f,2i) \qquad (*)$

1) $Res(f,2i) = \lim_{z\to 2i}[(z-2i)^2 f(z)]' = \lim_{z\to 2i}\left(\frac{ze^{iz}}{(z+2i)^2}\right)'$

$= \lim_{z\to 2i} \frac{e^{iz}((iz+1)(z+2i)-2z)}{(z+2i)^3} = \frac{e^{-2}}{8}$.

2) Si on prend la paramétrisation du demi-cercle Γ_R par $\Gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$, on a $dz = \Gamma_R'(t)dt = iR^{it}dt$ et

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}}{(z^2+4)^2}\,dz\right| \leq \left|\int_0^{\pi} \frac{Re^{it}e^{iRe^{it}}}{((Re^{it})^2+4)^2} iRe^{it}\,dt\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R^2e^{-R\sin t}}{(R^2-4)^2}\,dt \leq \frac{\pi R^2}{(R^2-4)^2} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque : On utilise pour la dernière inégalité que , $\left|\frac{1}{(z^2+4)^2}\right| \leq \frac{1}{(|z|^2-4)^2}$ et que pour $t \in [0,\pi]$, $0 \leq e^{-R\sin t} \leq 1$.

Par passage à la limite quand $R \to +\infty$ dans $(*)$ on aura

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{(x^2+4)^2}\,dx = 2i\pi Res(f,2i) = 2i\pi \times \frac{e^{-2}}{8} = \frac{i\pi e^{-2}}{8}$.

La partie imaginaire nous donne $\boxed{J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{\pi}{8e^2}}$ et la partie réelle $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{(x^2+4)^2}\,dx = 0$ (ce qui est prévisible puisque la fonction est impaire).

2. $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2t}{4-2\sin t}\,dt.$

   Si on pose, pour $t \in [0,2\pi]$, $z = \gamma(t) = e^{it}$ alors :

   $\frac{dz}{iz} = dt$, $\sin t = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$ et $\sin 2t = \frac{z^2-\frac{1}{z^2}}{2i}$.

   Par suite $\frac{\sin 2t}{4-2\sin t} = \frac{\frac{z^2-\frac{1}{z^2}}{2i}}{4-2\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}} = \frac{z^4-1}{2z(-z^2+4iz+1)}$ d'où

   $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2t}{4-2\sin t}\,dt = \int_\gamma \frac{z^4-1}{2z(-z^2+4iz+1)}\frac{dz}{iz} = \int_\gamma \frac{z^4-1}{2iz^2(-z^2+4iz+1)}\,dz$

   Comme la fonction $f(z) = \frac{z^4-1}{2iz^2(-z^2+4iz+1)}$ a 2 pôles à l'intérieur du disque unité, 0 (pôle d'ordre 2) et $(2-\sqrt{3})i$ (pôle d'ordre 1, racine simple de $z^2-4iz-1=0$)

   D'après le théorème des résidus :

$$\int_\gamma \frac{z^4-1}{2iz^2(-z^2+4iz+1)}\,dz = 2i\pi\left(Res(f,0) + Res(f,\frac{1}{2})\right).$$

i) $Res(f,0) = \lim_{z\to 0}[z^2 f(z)]' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z^4-1}{2i(-z^2+4iz+1)}\right)' = 2$

ii) $Res(f,(2-\sqrt{3})i) = \lim_{z\to(2-\sqrt{3})i}(z-(2-\sqrt{3})i)f(z) = \lim_{z\to(2-\sqrt{3})i}\frac{z-\frac{1}{2}}{(z^2-4iz-1)} \times \lim_{z\to(2-\sqrt{3})i}\frac{z^4-1}{2iz^2} = \lim_{z\to(2-\sqrt{3})i}\frac{1}{(2z-4i)} \times \lim_{z\to(2-\sqrt{3})i}\frac{z^4-1}{2iz^2} = \frac{1}{-2\sqrt{3}i} \times \frac{(2-\sqrt{3})^4-1}{-2i(2-\sqrt{3})^2} = -2.$

Finalement,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2t}{5-4\sin t}\,dt = \int_\gamma \frac{z^4-1}{iz^2(-z^2+4iz+1)}\,dz$$
$$= 2i\pi(Res(f,0) + Res(f,(2-\sqrt{3})i)) = 2i\pi(2-2) = 0.$$

Remarque : On peut voir directement (sans passer par les résidus) que cett in tégrale est nulle, puisque $g(t) = \dfrac{\sin 2t}{4-2\sin t} = \dfrac{\sin t\cos t}{2-\sin t}$ admet une primitive $G(t) = -2\ln(2-\sin t) - \sin t$, qui est 2π-périodique .