Université de Rennes 1 Calcul différentiel et fonctions holomorphes
Année 2008-2009

Examen
lundi 25 mai 2009
Durée 2h

L'épreuve est composée de 4 exercices indépendants
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sin(x+y^2) - 2y$.

1. Montrer que f est une fonction de classe C^∞ et calculer en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, sa matrice jacobienne $J_f(x,y)$.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction $\varphi :]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbb{R}$ tels que : $\varphi(0) = 0$ et $f(\varphi(y),y) = 0$.
3. Détermine le développement limité de φ à l'ordre 2 en 0.
   En déduire $\lim_{y\to 0} \dfrac{\varphi(y) - 2y}{2y^2}$.

Exercice 2.
Soit $\phi : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (e^x + \ln(y), e^x + \ln(y^3))$.

1. Rappeler la définition d'un difféomorphisme de classe C^1.
2. Montrer que l'image de ϕ est l'ensemble $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | v < 3u\}$.
3. Montrer que ϕ est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ sur U.
4. Soit $f : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, la fonction définie par :
   $f(x,y) = e^{3x} + e^{2x}(3\ln y - 1) + 3e^x((\ln y)^2 - 2\ln y) + (\ln y)^3 - 9(\ln y)^2$.
   Montrer que $f = g \circ \phi$ où $g(u,v) = u^3 - v^2$.
   En déduire les éventuels extrema de f dans $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.

Exercice 3.
Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^2 \sin z} dz$ dans chacun des cas suivants :

1. γ est le cercle de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$, orienté dans le sens positif.
2. γ est le cercle de centre 1 et de rayon $\frac{1}{2}$, orienté dans le sens positif.
3. γ est le triangle de sommets : $-i$, $(1+i)$ et 4, orienté dans le sens positif.

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx.$
2. $\displaystyle I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t}{5 - 4\cos t}\, dt.$