Université de Rennes 1 Calcul différentiel et fonctions holomorphes
Année 2008-2009

Examen
lundi 25 mai 2009
Durée 2h

L'épreuve est composée de 4 exercices indépendants
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sin(x + y^2) - 2y$.

1. Montrer que f est une fonction de classe C^∞ et calculer en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, sa matrice jacobienne $J_f(x,y)$.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction $\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ tels que : $\varphi(0) = 0$ et $f(\varphi(y),y) = 0$.
3. Détermine le développement limité de φ à l'ordre 2 en 0.
   En déduire $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\varphi(y) - 2y}{2y^2}$.

Exercice 2.
Soit $\phi : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (e^x + \ln(y), e^x + \ln(y^3))$.

1. Rappeler la définition d'un difféomorphisme de classe C^1.
2. Montrer que l'image de ϕ est l'ensemble $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | v < 3u\}$.
3. Montrer que ϕ est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ sur U.
4. Soit $f : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, la fonction définie par :
   $f(x,y) = e^{3x} + e^{2x}(3 \ln y - 1) + 3e^x((\ln y)^2 - 2 \ln y) + (\ln y)^3 - 9(\ln y)^2$.
   Montrer que $f = g \circ \phi$ où $g(u,v) = u^3 - v^2$.
   En déduire les éventuels extrema de f dans $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

Exercice 3.
Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^2 \sin z} dz$ dans chacun des cas suivants :

1. γ est le cercle de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$, orienté dans le sens positif.
2. γ est le cercle de centre 1 et de rayon $\frac{1}{2}$, orienté dans le sens positif.
3. γ est le triangle de sommets : $-i$, $(1+i)$ et 4, orienté dans le sens positif.

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx.$
2. $\displaystyle I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t}{5 - 4\cos t}\, dt.$

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sin(x+y^2) - 2y$.

1. Par le théorème de composition avec les fonctions sin, et des fonctions polynomiales, f est différentiable à tout ordre, donc de classe C^∞ et

$$J_f(x,y) = \big(\cos(x+y^2), \quad 2y\cos(x+y^2) - 2\big)\,.$$

2. On constate que $f(0,0) = 0$ et que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \cos(0) = 1 \neq 0$; d'après le théorème des fonctions implicites, il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction (différentiable à tout ordre) $\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ tels que : $\varphi(0) = 0$ et $f(\varphi(y),y) = 0$ pour tout $y \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.
3. En dérivant la relation $\sin(\varphi(y)) + y^2) - 2y \equiv 0$, sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ deux fois on obtient :

$$(\varphi'(y) + 2y)\cos(\varphi(y) + y^2) - 2 = 0$$

$$(\varphi''(y) + 2)\cos(\varphi(y) + y^2) - (\varphi'(y) + 2y)^2 \sin(\varphi(y) + y^2) = 0$$

En particulier au point $y = 0$, on obtient :
$\varphi'(0) - 2 = 0$ et $\varphi''(0) + 2 = 0$.
D'où, le développement à l'ordre 2 en $y = 0$ de φ :
$\varphi(y) = \varphi(0) + \varphi'(0)y + \frac{\varphi''(0)}{2}y^2 + o(y^2) = 2y - y^2 + o(y^2)$.
Par suite $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\varphi(y) - 2y}{2y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{-y^2 + o(y^2)}{2y^2} = \dfrac{-1}{2}$.

Exercice 2. Soit $\phi : \mathbb{R}\times]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (e^x + \ln(y), e^x + \ln(y^3))$.

1. Un difféomorphisme de classe C^1, est une application bijective de classe C^1 et dont l'inverse est de classe C^1.

   Remarque 1 : Une conséquence du théorème d'inversion locale : Un difféomorphisme de classe C^1, est une application bijective de classe C^1 et dont la jacobienne est inversible en tout point.
2. Soit $(u,v) \in U$. On doit montrer qu'il admet des antécédents dans $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$, pour cela on doit résoudre le système : $\begin{cases} e^x + \ln(y) & = u \\ e^x + 3\ln(y) & = v \end{cases}$.
On obtient l'unique solution $y = e^{\frac{v-u}{2}}$ et $x = \ln(\frac{3u-v}{2})$.

3. D'après la question précédent, $\phi^{-1} : U \to \mathbb{R}\times]0,+\infty[$ est l'application définie par $\phi^{-1}(u,v) = (\ln(\frac{3u-v}{2}), e^{\frac{v-u}{2}})$ qui est aussi de classe C^1, d'où ϕ est un difféomorphisme de classe C^1.

   Remarque 2 : On peut aussi utiliser, la caractérisation d'un difféomorphisme de classe C^1 donnée dans la Remarque 1, sans calculer ϕ^{-1}. Il faudrait pour cela vérifier que ϕ est injective et de jacobien non nul,

   $J_\phi(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & \frac{1}{y} \\ e^x & \frac{3}{y} \end{pmatrix}$ et $\det J_\phi(x,y) = \frac{2e^x}{y} \neq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$.

4. Un calcul direct nous donne

   $f(x,y) = g \circ \phi(x,y) = (e^x + \ln(y))^3 - (e^x + \ln(y^3))^2 = (e^{3x} + 3e^{2x}\ln y + 3e^x(\ln y)^2 + (\ln y)^3) - (e^{2x} + 2e^x\ln(y^3) + (\ln(y^3))^2) = 3e^x((\ln y)^2 - 2\ln y) + (\ln y)^3 - 9(\ln y)^2$.

   Comme $Df(x,y) = Dg(\phi(x,y))D\phi(x,y)$ et que $D\phi(x,y)$ est inversible en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$, alors $Df(x,y) = 0$ si et seulement si $Dg(\phi(x,y)) = 0$.

   Mais, $Dg(u,v) = (3u^2, -2v) = 0$ entraîne $(u,v) = (0,0)$, qui n'est pas un point de U, donc g n'a pas de point critique dans U ce qui entraîne que f n'a pas de point critique dans $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et a fortiori pas d'extrema.

Exercice 3. On pose $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2\sin z}$, f a un pôle d'ordre 2 en $z = 1$ et des pôles d'ordre 1 en $sinz = 0$ c-à-d en $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

1. Comme $f(z)$ a un pôle simple à l'intérieur du disque $D(0,\frac{1}{2})$, à savoir $z = 0$, d'après le théorème des résidus : $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi Res(f,0)$

   $$Res(f,0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} z\frac{e^z}{(z-1)^2\sin z} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z} \times \lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e^0}{(-1)^2} = 1$$

   D'où $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^2\sin z}dz = 2i\pi.$

2. Comme, $f(z)$ a un pôle d'ordre 2 à l'intérieur du disque $D(1,\frac{1}{2})$, à savoir $z = 1$, d'après le théorème des résidus : $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi Res(f,1)$

   $$Res(f,1) = \lim_{z\to 1}[(z-1)^2 f(z)]' = \lim_{z\to 1}\left(\frac{e^z}{\sin z}\right)' = \lim_{z\to 1}\frac{e^z(\sin z - \cos z)}{(\sin z)^2} = \frac{e(\sin 1 - \cos 1)}{(\sin 1)^2}$$

   D'où $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^2\sin z}dz = 2i\pi\frac{e(\sin 1 - \cos 1)}{(\sin 1)^2}.$

3. Comme, $f(z)$ a deux pôles à l'intérieur du triangle, à savoir $z = 1$ et $z = \pi$, d'après le théorème des résidus : $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi(Res(f,1) + Res(f,\pi))$.

Il nous reste à calculer le residu de f en $z = \pi$.

$$Res(f,\pi) = \lim_{z\to\pi}(z-\pi)f(z) = \lim_{z\to\pi}(z-\pi)\frac{e^z}{(z-1)^2\sin z} = \lim_{z\to\pi}\frac{z-\pi}{\sin z} \times \lim_{z\to\pi}\frac{e^z}{(z-1)^2}$$
$$= \frac{1}{\cos\pi}\frac{e^\pi}{(\pi-1)^2} = -\frac{e^\pi}{(\pi-1)^2}$$

D'où $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^2\sin z}dz = 2i\pi\left(\frac{e(\sin 1-\cos 1)}{(\sin 1)^2} - \frac{e^\pi}{(\pi-1)^2}\right).$

Exercice 4.

1. $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx.$

Remarque : Comme $\frac{|e^{ix}|}{(x^2+1)^2} \leq \frac{1}{x^2+1}$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx = \pi$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx$ converge. D'autre part, $\frac{\cos x}{(x^2+1)^2} = \Re e(\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}$, on va donc calculer $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2(x^2+1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx.$

On pose $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$.

La fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$, a deux pôles d'ordre 2, (les racines de $(z^2+1)^2 = 0$), à savoir les points i et $-i$

Pour $R > 1$, on considère le lacet γ_R formé du segment $[-R,R]$ et du demi-cercle suprérieur Γ_R de centre 0 et de rayon R.

Il n'y a que le pôle $z = i$ qui soit à l'intérieur du domaine délimité par le lacet γ_R et d'après le théorème des résidus $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2i\pi Res(f,i)$ c-à-d

$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx = 2i\pi Res(f,i) \qquad (*)$

1) $Res(f,i) = \lim_{z\to i}[(z-i)^2f(z)]' = \lim_{z\to i}\left(\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}\right)'$

$= \lim_{z\to i}\frac{ie^{iz}(z+i)^2-2(z+i)e^{iz}}{(z+i)^2} = \frac{-ie^{-1}}{2}.$

2) Si on paramètre le demi-cercle Γ_R par $\Gamma_R(t) = Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$, on a $dz = \Gamma_R'(t)dt = iR^{it}dt$ et

$$\left|\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz\right| \leq \left|\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{((Re^{it})^2+1)^2}iRe^{it}\,dt\right| \leq \int_0^\pi \frac{e^{-R\sin t}}{(R^2-1)^2}R\,dt \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque : On utilise pour la dernière inégalité que , $\left|\frac{1}{(z^2+1)^2}\right| \leq \frac{1}{(|z|^2-1)^2}$ et que pour $t\in[0,\pi]$, $0 < e^{-R\sin t} \leq 1$.

Par passage à la limite quand $R \to +\infty$ dans $(*)$ on aura
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx = 2i\pi Res(f,i) = 2i\pi \times \frac{-ie^{-1}}{2} = \pi e^{-1}$.
La partie réelle nous donne $\boxed{J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{e}}$ et la partie imaginaire $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx = 0$ (ce qui est prévisible puisque la fonction est impaire).

2. $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t}{5-4\cos t}\,dt$.
Si on pose, pour $t \in [0,2\pi]$, $z = \gamma(t) = e^{it}$ alors :
$\frac{dz}{iz} = dt$, $\cos t = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$ et $\cos 3t = \frac{z^3+\frac{1}{z^3}}{2}$.
Par suite $\frac{\cos 3t}{5-4\cos t} = \frac{\frac{z^3+\frac{1}{z^3}}{2}}{5-4\frac{z+\frac{1}{z}}{2}} = \frac{z^6+1}{z^2(-4z^2+10z-4)}$ d'où
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t}{5-4\cos t}\,dt = \int_\gamma \frac{z^6+1}{z^2(-4z^2+10z-4)}\frac{dz}{iz} = \int_\gamma \frac{z^6+1}{iz^3(-4z^2+10z-4)}\,dz$$
Comme la fonction $f(z) = \frac{z^6+1}{iz^3(-4z^2+10z-4)}$ a 2 pôles à l'intérieur du disque unité, 0 (pôle d'ordre 3) et $\frac{1}{2}$ (pôle d'ordre 1, racine de $-4z^2+10z-4=0$)
D'après le théorème des résidus :
$$\int_\gamma \frac{z^6+1}{iz^3(-4z^2+10z-4)}\,dz = 2i\pi\left(Res(f,0) + Res(f,\frac{1}{2})\right).$$

i) $Res(f,0) = \lim_{z\to 0}[\frac{z^3 f(z)}{2}]'' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z^6+1}{2i(-4z^2+10z-4)}\right)'' = \frac{-21}{16i}$
Remarque : On peut aussi utiliser le développement en série de Laurent de f en $z=0$, on a :
$\frac{1}{(-4z^2+10z-4)} = \frac{-1}{4}\frac{1}{1-(\frac{5}{2}z-z^2)} = \frac{-1}{4}(1+(\frac{5}{2}z-z^2)+(\frac{5}{2}z-z^2)^2+o(z^2) = \frac{-1}{4}(1+\frac{5}{2}z+(\frac{25}{4}-1)z^2+o(z^2) = \frac{-1}{4}-\frac{5}{8}z-\frac{21}{16}z^2+o(z^2)$ par suite
$\frac{z^6+1}{(-4z^2+10z-4)} = (1+z^6)(\frac{-1}{4}-\frac{5}{8}z-\frac{21}{16}z^2+o(z^2)) = \frac{-1}{4}-\frac{5}{8}z-\frac{21}{16}z^2+o(z^2)$
D'où $f(z) = \frac{z^6+1}{iz^3(-4z^2+10z-4)} = \frac{1}{iz^3}\frac{z^6+1}{(-4z^2+10z-4)} = \frac{-1}{4iz^3} - \frac{5}{8iz^2} - \frac{21}{16iz} + O(1)$.
et donc $Res(f,0) = a_{-1} = \frac{-21}{16i}$.
ii) $Res(f,\frac{1}{2}) = \lim_{z\to\frac{1}{2}}(z-\frac{1}{2})f(z) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{z-\frac{1}{2}}{(-4z^2+10z-4)} \times \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{z^6+1}{2iz^3} = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{1}{(-8z+10)} \times \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{z^6+1}{2iz^3} = \frac{65}{48i}$.
Finalement,
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3t}{5-4\cos t}\,dt = \int_\gamma \frac{z^6+1}{iz^3(-4z^2+10z-4)}\,dz$$
$$= 2i\pi(Res(f,0) + Res(f,\frac{1}{2})) = 2i\pi(\frac{-21}{16i} + \frac{65}{48i}) = \frac{\pi}{12}.$$