Examen
lundi 30 avril 2012
Durée 2h

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La présentation et la rédaction seront prises en compte dans la notation.
Le barême est à titre indicatif.

1

Exercice 1. (3 pts) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sin\left(\frac{\pi y}{2x}\right)$.

1. Déterminer la différentielle de f au point $(1,1)$ appliquée au vecteur (h,k) i.e. $Df(1,1)(h,k)$.
2. Montrer que pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$D^2 f(1,1)((h,k),(h,k)) = -\frac{\pi^2}{4}(h-k)^2.$$

3. Que peut-on dire du point $(1,1)$?

Exercice 2. (7 pts) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $h_\lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (\,x + \frac{y}{2},\, y + \lambda \sin x)$.

1. Calculer les dérivées partielles de h_λ et sa matrice jacobienne en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. En déduire que h_λ est un difféomorphisme local de classe C^1 au voisinage de tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si $|\lambda| < 2$.

   On suppose désormais que $|\lambda| < 2$.
3. Montrer que h_λ est injective.
   En déduire que h_λ est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ sur son image.
   (Indication : pour montrer l'injectivité de h_λ, on pourra utiliser l'inégalité $|\sin x - \sin x'| \leq |x - x'|$.)
4. Montrer que l'image de h_λ est $\mathbb{R}^2$ i.e h_λ est surjective.

Exercice 3. (3 pts) Pour chacune des questions suivantes, justifier la réponse.

1. Quels sont les zéros de la fonction $z \mapsto \sin z$.
2. Existe-t-il une fonction holomorphe $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ non identiquement nulle et telle que $f(2^{-n}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

1.

tourner la page svp

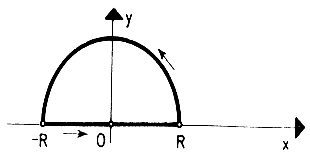
3. Existe-t-il une fonction holomorphe et non constante $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus D(0,\frac{1}{2})$?
(Indication : On pourra considérer la fonction $g = \frac{1}{f}$.)

Exercice 4. (2 pts) Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-2)^2(z-4)}$ dans chacun des cas suivants :

1. γ est le cercle de centre 0 et de rayon 3, orienté dans le sens positif.
2. γ est le triangle de sommets 0, $5+4i$ et $5-4i$, orienté dans le sens positif.

Exercice 5. (5 pts) Soit $\alpha \geq 0$.

1. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^4}\, dx$.
On considère la fonction de la variable complexe
$$F(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^4}.$$
2. Déterminer les points singuliers de F. Calculer les résidus de F aux points singuliers situés dans le demi-plan $\mathcal{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}(z) \geq 0\}$.
3. Montrer que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^4}\, dx = \pi e^{-\alpha/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right).$$
Pour le calcul on pourra utiliser, pour $R > 1$, le lacet γ_R (parcouru dans le sens positif) constitué du segment de droite joignant $-R$ à R, suivi du demi-cercle de centre 0 et de rayon R joignant R à $-R$ (voir figure)



4. Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^4}\, dx$ lorsque $\alpha < 0$?