Corrigé de l'examen du lundi 30 avril 2012

Exercice 1. (3 pts) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sin\left(\frac{\pi y}{2x}\right)$.

1. f est différentiable sur son domaine de définition comme composée de fonctions différentiables et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:
$$J_f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(-\frac{\pi y}{2x^2}\cos\left(\frac{\pi y}{2x}\right),\ \frac{\pi}{2x}\cos\left(\frac{\pi y}{2x}\right)\right).$$
En particulier au point $(1,1)$, $Jf(1,1) = (0,0)$ ainsi $Df(1,1)(h,k) = (0,0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = 0$

2. f est deux fois différentiable sur son domaine de définition et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\pi y}{x^3}\cos\left(\frac{\pi y}{2x}\right) - \left(\frac{\pi y}{2x^2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi y}{2x}\right)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{\pi}{2x}\cos\left(\frac{\pi y}{2x}\right) - \frac{\pi^2 y}{4x^3}\sin\left(\frac{\pi y}{2x}\right)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\left(\frac{\pi}{2x}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi y}{2x}\right)$.
En particulier au point $(1,1)$, $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi^2}{4} \\ \frac{\pi^2}{4} & -\frac{\pi^2}{4} \end{pmatrix}$
Ainsi $D^2 f(1,1)((h,k),(h,k)) = (h,k).H_f(1,1).\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = -\frac{\pi^2}{4}(h-k)^2$.

3. On déduit de la question 1 que $(1,1)$ est un point critique de f.
D'après la question 2, la forme quadratique $(h,k) \mapsto D^2 f(1,1)((h,k),(h,k))$ est négative, mais n'est pas définie, car
$D^2 f(1,1)((h,h),(h,h)) = 0$, on ne peut donc pas conclure avec les résultats du cours que $(1,1)$ est un minimum local.
Cependant, comme $f(1,1) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \geq \sin\left(\frac{\pi y}{2x}\right) = f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $(1,1)$ est un maximum global de f.

Exercice 2. (7 pts)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $h_\lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (\,x + \frac{y}{2},\, y + \lambda \sin x)$.

1. h_λ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1,\lambda\cos x)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (\frac{1}{2},1)$. D'où la matrice jacobienne de h_λ est : $J_{h_\lambda}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \lambda\cos x & 1 \end{pmatrix}$.

2. D'après le théorème d'inversion locale, h_λ est un difféomorphisme de classe C^1 au voisinage de tout points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $J_{h_\lambda}(x,y)$ est inversible i.e. $\det J_{h_\lambda}(x,y) = 1 - \frac{\lambda}{2}\cos x \neq 0$ qui s'écrit aussi $\lambda \cos x \neq 2$.
   Si $|\lambda| < 2$ alors $|\lambda \cos x| < 2$, ainsi $\lambda \cos x \neq 2$.
   Réciproquement, si $|\lambda| \geq 2$, $\lambda \cos x = 2$ admet $x = \arccos\dfrac{2}{\lambda}$ comme solution, d'où pour tout $y \in \mathbb{R}$ le couple $(\arccos\dfrac{2}{\lambda},y)$ vérifie $\det J_{h_\lambda}(\arccos\dfrac{2}{\lambda},y) = 0$.
   Ainsi h_λ est un difféomorphisme local de classe C^1 au voisinage de tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si $|\lambda| < 2$.

3. Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ tels que $h_\lambda(x,y) = h_\lambda(x',y')$.
   Alors $\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} = x' + \dfrac{y'}{2} \\ y + \lambda \sin x = y' + \lambda \sin x' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x' = \dfrac{y'-y}{2} & (1) \\ y - y' = \lambda(\sin x' - \sin x) & (2) \end{cases}$ D'après l'inégalité des accroissements finis $|\sin x' - \sin x| \leq \max_{t\in\mathbb{R}} |\cos t||x' - x| \leq |x' - x|$, donc (2) donne $|y - y'| = |\lambda||\sin x' - \sin x| \leq |\lambda||x - x'|$ et par suite (1) donne $|y - y'| \leq \frac{|\lambda|}{2}|y - y'|$.
   Maintenant, si on suppose que $y \neq y'$, on aura que $1 \leq \frac{|\lambda|}{2}$ ce qui est absurde, donc nécessairement $y = y'$, et l'équation (1) entraîne $x = x'$. Ainsi h_λ est injective.
   Par le théorème d'inversion globale, comme h_λ est injective et difféomorphisme local de classe C^1 au voisinage de tout points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, h_λ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image $h_\lambda(\mathbb{R}^2)$.
4. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. On veut montrer qu'il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h_\lambda(x,y) = (u,v)$
   i.e. $\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} = u \\ y + \lambda \sin x = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda \sin x = 2u - v & (1) \\ y = -\lambda \sin x + v & (2) \end{cases}$
   Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 2x - \lambda \sin x$.
   Comme g est continue, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires , $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, donc il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = 2u - v$. Pour un tel x, si on pose $y = -\lambda \sin x + v$, alors $h_\lambda(x,y) = (u,v)$.
   On a montré ainsi que h_λ est surjective i.e. $h_\lambda(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

Exercice 3. (3 pts) Pour chacune des questions suivantes, justifier la réponse.

1. Quels sont les zéros de la fonction $z \mapsto \sin z$. Soit $z \in \mathbb{C}$.
   $\sin z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $iz = -iz + 2ik\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = k\pi$
   Ainsi, les zéros de la fonction $z \mapsto \sin z$ sont les $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. Existe-t-il une fonction holomorphe $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ non identiquement nulle et telle que $f(2^{-n}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Comme f est holomorphe elle est en particulier continue, ainsi $0 = \lim_{n\to+\infty} f(2^{-n}) = f(\lim_{n\to+\infty} 2^{-n}) = f(0)$.

Ainsi 0, n'est pas un zéro isolé de f, comme $D(0,1)$ est connexe, d'après le principe des zéros isolés, f est nécessairement identiquement nulle.

Donc, il n'existe pas de fonction non identiquement nulle, qui vérifie cette condition.

3. Existe-t-il une fonction holomorphe et non constante $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus D(0,\frac{1}{2})$?
   Soit f une telle fonction, alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$ et $|f(z| \geq \frac{1}{2}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Donc si on pose $g = \frac{1}{f}$, on aura $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe et bonée (car pour tout $z \in \mathbb{C}$ $|g(z)| \leq 2$). Par le théorème de Liouville, g est constante et par suite f l'est aussi.
   Donc les seules fonctions vérifiant la condition sont les fonctions constantes $f(z) = c$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $c \in \mathbb{C} \setminus D(0,\frac{1}{2})$.

Exercice 4. (2 pts) $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2(z-4)}$. a deux pôles, à savoir $z = 2$ est un pôle d'ordre 2 et $z = 4$ est un pôle simple.

On a $Res(f,2) = \lim_{z\to 2}\left((z-2)^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to 2}\left(-\dfrac{1}{(z-4)^2}\right) = -\frac{1}{4}$ et $Res(f,4) = \lim_{z\to 4}\left((z-4)f(z)\right) = \lim_{z\to 4}\left(\dfrac{1}{(z-2)}\right) = \frac{1}{4}$.

D'après le théorème des résidus, pour tout lacet γ dont l'image ne contient pas 2 et 4 :

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-2)^2(z-4)} = 2i\pi\left(Res(f,2).Ind_\gamma(2) + Res(f,4).Ind_\gamma(4)\right)$$

1. γ est le cercle de centre 0 et de rayon 3, orienté dans le sens positif.
   Alors $Ind_\gamma(2) = 1$ et $Ind_\gamma(4) = 0$ d'où $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-2)^2(z-4)} = 2i\pi.(-\frac{1}{4}) = \frac{-i\pi}{2}$.
2. γ est le triangle de sommets 0, $5+4i$ et $5-4i$, orienté dans le sens positif.
   Alors $Ind_\gamma(2) = 1$ et $Ind_\gamma(4) = 1$ d'où $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-2)^2(z-4)} = 2i\pi\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 0$.

Exercice 5. (5 pts)

1. Comme $\alpha \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{e^{i\alpha x}}{1+x^4}\right| = \frac{1}{1+x^2}$. D'autre part , $x \mapsto \frac{1}{1+x^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\frac{1}{1+x^4} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{1}{x^4}$ donc, $x \mapsto \frac{1}{1+x^4}$ est intégrable ainsi $x \mapsto \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^4}$ est absolument intégrable, d'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^4}\,dx$ est convergente.
2. Les points singuliers de F sont les zéros du numérateurs, $z^4 + 1 = 0$ i.e. $z^4 = -1 \Leftrightarrow \{e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}\}$.

Ainsi F à deux pôles simples, situé dans le demi-plan $\mathcal{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathfrak{Im}(z) \geq 0\}$ à savoir $e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $e^{\frac{3i\pi}{4}}$. On calcul les résidus par la formule

$Res(F,e^{\frac{i\pi}{4}}) = \frac{e^{i\alpha z}}{(1+z^4)'}\Big|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{e^{i\alpha z}}{4z^3}\Big|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{e^{i\alpha e^{\frac{i\pi}{4}}}}{4e^{\frac{3i\pi}{4}}}$

$= \frac{1}{4}exp(i\alpha e^{\frac{i\pi}{4}} - \frac{3i\pi}{4}) = \frac{1}{4}e^{-\alpha/\sqrt{2}}\,exp\left(i\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{3\pi}{4}\right)\right) = -\frac{1}{4}e^{-\alpha/\sqrt{2}}\,exp\left(i\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

de même on trouve $Res(F,e^{\frac{3i\pi}{4}}) = \frac{1}{4}exp(i\alpha e^{\frac{3i\pi}{4}} - \frac{i\pi}{4}) = \frac{1}{4}e^{-\alpha/\sqrt{2}}\,exp\left(-i\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

3. On va appliquer le théorème des résidus au domaine (simplement connexe) $\mathbb{C}$, au lacet simple γ_R et à la fonction $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \{e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}\})$. Comme γ_R ne passe par les pôles car $R > 1$ et que seuls $e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $e^{\frac{3i\pi}{4}}$ sont à l'intérieur de γ_R on aura :
$\displaystyle\int_{\gamma_R} F(z)\,dz = 2i\pi\left(Res(F,e^{\frac{i\pi}{4}}) + Res(F,e^{\frac{3i\pi}{4}})\right) =$
$\displaystyle 2i\pi \times \frac{1}{4}e^{-\alpha/\sqrt{2}}\left(-exp\left(i\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)\right) + exp\left(-i\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)\right)\right) =$
$\displaystyle 2i\pi \times \frac{1}{4}e^{-\alpha/\sqrt{2}}\left(-2i\sin\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \pi e^{-\alpha/\sqrt{2}}\,\sin\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right).$
D'autre part, si on prend la paramétrisation du demi-cercle Γ_R donnée par $\Gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$, on a $dz = \Gamma_R'(t)dt = iR^{it}dt$.
Comme, α et $\mathfrak{Im}(z)$ sont positifs, $|F(z)| = \frac{e^{-\alpha\mathfrak{Im}(z)}}{|1+z^4|} \leq \frac{1}{R^4-1}$ et que la longueur de Γ_R est égale à πR on aura

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^4}\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^4-1} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Maintenant, $\displaystyle\pi e^{-\alpha/\sqrt{2}}\,\sin\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) = \int_{\gamma_R} F(z)\,dz = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^4}\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^4}\,dx$, par passage à la limite lorsque $R \to +\infty$ on obtient le résultat :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^4}\,dx = \pi e^{-\alpha/\sqrt{2}}\,\sin\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Soit $\alpha < 0$. Par le changement de variable $u = -x$ on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^4}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{1+u^4}\,du$ comme $-\alpha > 0$, d'après la question 3, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{1+u^4}\,du = \pi e^{\alpha/\sqrt{2}}\,\sin\left(\frac{-\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)$ d'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^4}\,dx = \pi e^{\alpha/\sqrt{2}}\,\sin\left(\frac{-\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)$.