Université de Rennes 1 L3 - Calcul différentiel et fonctions holomorphes
Année 2010-2011

Examen
lundi 11 avril 2011
Durée 2h

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La présentation et la rédaction seront prises en compte dans la notation.
Le barême est à titre indicatif.

[1]

Exercice 1. (1,5pt)
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^2y^5(y-x)$ et $a=(1,2)$.

1. Déterminer la matrice jacobienne de f en tout point (x,y).
2. Déterminer $Df(a)(h)$ et $D^2f(a)(h,k)$ pour tout h et $k\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. (5pt) Soit $h:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(\frac{-x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2})$.

1) Rappeler la définition d'un difféomorphisme de classe C^1.
2) Montrer que $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ est connexe.
3) Déterminer l'image de h.
Montrer que $\det J_h(x,y)>0$ en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
4) Montrer que h est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ sur son image et que $h^{-1}=h$.
5) En identifiant $z=x+iy$ avec (x,y), déterminer $H(z):=h(x,y)$ en fonction de z.
Expliquer comment on peut obtenir les résultats de 3) et 4) en utilisant H.

Exercice 3. (3,5pt)
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^4+2y^4-2(x-2y)^2$.

1. Déterminer la nature des points critiques de f.
2. Montrer que $\lim\limits_{||(x,y)||\to+\infty} f(x,y)=+\infty$.
3. En déduire les extrema globaux de f.

Exercice 4. (3pt)

1. Enoncer le théorème de Liouville
2. Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorphe et $M\in\mathbb{R}$ tels que $\mathfrak{Re}(f(z))\leq M$ pour tout $z\in\mathbb{C}$.
Montrer que $\left|e^f\right|$ est bornée.
3. En déduire que f est constante.

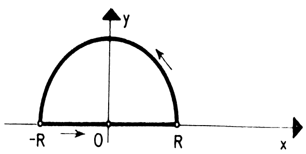
1.

tourner la page svp

Exercice 5. (5pt) Soit $a \geq 0$. On considère la fonction de la variable complexe

$$F_a(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2+1}.$$

1. Déterminer les points singuliers de F_a ainsi que les résidus en ces points.
2. Pour $R > 1$, on considère le lacet γ_R (parcouru dans le sens positif) constitué du segment de droite joignant $-R$ à R, suivi du demi-cercle de centre 0 et de rayon R joignant R à $-R$ (voir figure)



   Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_R} F_a(z)\, dz = \pi e^{-a}$
3. Montrer que l'intégrale $I_a = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\, dx$ est convergente.
4. Déterminer I_a.
5. En déduire, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2+1}\, dx$.

Exercice 6. (2 pt)

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{e^{it}}\, dt$.
   (on pourra utiliser $z = e^{it}$)
2. (question bonus +1)
   Calculer $\displaystyle\int_{C^+(1,4)} \frac{1}{\sin z}\, dz$
   où $C^+(1,4)$ est le cercle de centre 1 et de rayon 4 orienté dans le sens positif.