Corrigé
lundi 11 avril 2011

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2y^5(y-x)$ et $a = (1,2)$.

1. Déterminer la matrice jacobienne de f en tout point (x,y).
   Réponse :
   $J_f(x,y) = (2xy^6 - 3x^2y^5, 6x^2y^5 - 5x^3y^4)$.
2. Déterminer $Df(a)(h)$ et $D^2f(a)(h,k)$ pour tout h et $k \in \mathbb{R}^2$.
   Réponse : Si $h = (h_1,h_2)$ alors

$$Df(a)(h) = J_f(1,2).\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 32h_1 + 112h_2.$$

Si $h = (h_1,h_2)$ et $k = (k_1,k_2)$

$$\begin{aligned} D^2f(a)(h,k) = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} H_f(1,2)(k_1,k_2) &= \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -64 & 144 \\ 144 & 320 \end{pmatrix} (k_1,k_2) \\ &= -64h_1k_1 + 144h_1k_2 + 144h_2k_1 + 320h_2k_2. \end{aligned}$$

Exercice 2. Soit $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$.

1) Rappeler la définition d'un difféomorphisme de classe C^1.
2) Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est connexe.
   Réponse : Soient $A = (x_1,y_1)$ et $B = (x_2,y_2)$ de points de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   Si $0 \notin [A,B]$ alors le segment $[A,B]$ est inclus dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   Si $0 \in [A,B]$, on choisit un point C qui n'appartient pas à la droite passant par A et B alors la réunion des segments, $[A,C] \cup [C,B]$, est un chemin inclus dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et joignant A et B. On a donc montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est connexe par arcs et donc connexe.
3) Déterminer l'image de h.
   Réponse :
   Si $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors $(u,v) = (\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ alors $u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2+y^2}$, d'où $(x,y) = (\frac{-u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2})$. Donc pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $h(x,y) = (u,v)$, ainsi l'image de h est $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Montrer que $\det J_h(x,y) > 0$ en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Réponse : On a $J_h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x^- y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$ **d'où** $\det J_h(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} > 0$ **pour tout** $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

4) Montrer que h est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sur son image et que $h^{-1} = h$.
Réponse : De la relation $(u,v) = (\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}) \Leftrightarrow (x,y) = (\frac{-u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2})$
on en déduit que h **est injective et comme l'image de** h **est** $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $h^{-1} = h$.
Donc h **est un difféomorphisme de classe** C^∞.

5) En identifiant $z = x + iy$ avec (x,y), déterminer $H(z) := h(x,y)$ en fonction de z.
Expliquer comment on peut obtenir les résultats de 3) et 4) en utilisant H.
Réponse : pour $z = x + iy \neq 0$ **on a**

$$H(z) = \frac{-x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{-x+iy}{x^2+y^2} = \frac{-\bar{z}}{|z|^2} = \frac{-z}{z\bar{z}} = -\frac{1}{z},$$

on voit que H **est inversible et que** $H^{-1}(z) = -\frac{1}{z}$. **D'autre part** $z \mapsto -\frac{1}{z}$ **est holomorphe sur** $\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, **alors comme toute fonction holomorphe de dérivée non nulle, la jacobienne est une similitude directe, donc de déterminant strictement positif. On retrouve ainsi que** $h^{-1} = h$ **et que** $\det J_h(x,y) > 0$ **en tout point** $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exercice 3.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + 2y^4 - 2(x-2y)^2$.

1. Déterminer la nature des points critiques de f.
Réponse : On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4x + 8y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8y^3 + 8x - 16y$$

En résolvant ce système on obtient les points critiques de f **qui sont** $(0,0)$, $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ **et** $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$.

2. Montrer que $\lim\limits_{||(x,y)|| \to +\infty} f(x,y) = +\infty$.
Réponse : On a $x^4 + 2y^4 \geq x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 = \frac{||(x,y)||^4}{2}$ **et** $2(x-2y)^2 \leq 2(|x|+2|y|)^2 \leq 8(|x|+|y|)^2 \leq 16||(x,y)||^2$.
Ainsi $f(x,y) \geq \frac{||(x,y)||^4}{2} - 16||(x,y)||^2 = ||(x,y)||^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{||(x,y)||^2}\right)$ **qui tends alors vers** $+\infty$ **lorsque** $||(x,y)||$ **tend vers** $+\infty$.

3. En déduire les extrema globaux de f.
Réponse : Le calcul des dérivées secondes donne la matrice hessienne :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 8 \\ 8 & 24y^2 - 16 \end{pmatrix}$$

Pour $(x,y) = (-\sqrt{3},\sqrt{3})$ et $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ on a pour hesssienne $\begin{pmatrix} 32 & 8 \\ 8 & 56 \end{pmatrix}$ de determinant égal à $1728 > 0$ et de trace $32+56 > 0$, donc les valeurs propres sont > 0 i.e. les points sont des minimums, absolus (d'après la question précédente) la valeur de f en ces points $f(-\sqrt{3},\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = -27$.
Au voisinage de $(x,y) = (0,0)$, on $f(2y,y) = 16y^4 + 2y^4 = 18y^4 > 0$ si $y \neq 0$ et $f(x,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$ si $0 < x < \sqrt{2}$. Ainsi, f change de signe dans tout voisinage de $(0,0)$ donc, elle présente un point selle en $(0,0)$.

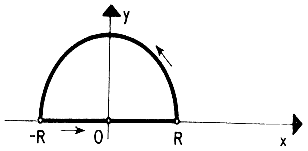
Exercice 4.

1. Enoncer le théorème de Liouville
2. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe et $M \in \mathbb{R}$ tels que $\mathfrak{Re}(f(z)) \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
   Montrer que $\left|e^f\right|$ est bornée.
   <u>Réponse :</u> $\left|e^f\right| = e^{\mathfrak{Re}(f(z))} \leq e^M$, d'où $\left|e^f\right|$ est bornée
3. En déduire que f est constante.
   <u>Réponse :</u> La fonction $z \mapsto e^{f(z)}$ est une fonction entière comme composée des fonctions entières e^z et f, d'après la question précédente elle est bornée, d'où, Théorème de Liouville, elle est constante. Alors, sa dérivée $(e^{f(z)})' = f'(z).e^{f(z)} = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, comme $e^{f(z)}$ ne s'annule pas, on aura $f'(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ i.e. f est constante.

Exercice 5. Soit $a \geq 0$. On considère la fonction de la variable complexe

$$F_a(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}.$$

1. Déterminer les points singuliers de F_a ainsi que les résidus en ces points.
   <u>Réponse :</u>
   Les points singuliers de F_a sont les zéros du numérateurs, $z^2+1 = 0$ à deux racines simples i et $-i$. Ainsi F_a à deux pôles simples, on détermine les résidus par la formule
   $Res(F_a,i) = \frac{e^{iaz}}{(z^2+1)'}|_{z=i} = \frac{e^{iaz}}{2z}|_{z=i} = \frac{e^{-a}}{2i}$; **de même on trouve** $Res(F_a, -i) = \frac{e^a}{-2i}$.
2. Pour $R > 1$, on considère le lacet γ_R (parcouru dans le sens positif) constitué du segment de droite joignant $-R$ à R, suivi du demi-cercle de centre 0 et de rayon R joignant R à $-R$ (voir figure)



   Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_R} F_a(z)\, dz = \pi e^{-a}$.

Réponse :
On applique le théorème des résidus

$$\begin{cases} \textbf{au domaine (simplement connexe) } \mathbb{C}, \\ \textbf{au lacet simple } \gamma_R \\ F_a \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \{i, -i\}) \end{cases}$$

comme γ_R ne passe par les pôles i et $-i$, car $R > 1$ et seul i est à l'intérieur de γ_R on aura :

$$\int_{\gamma_R} F_a(z)\, dz = 2i\pi Res(F,i) = 2i\pi \frac{e^{-a}}{2i} = \pi e^{-a}.$$

3. Montrer que l'intégrale $I_a = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\, dx$ est convergente.

   Réponse :
   $x \mapsto \frac{e^{iax}}{x^2+1}$ **est continue sur $\mathbb{R}$, et de $a \in \mathbb{R}$ on a**
   $\left|\frac{e^{iax}}{x^2+1}\right| = \frac{1}{x^2+1}$.
   D'autre part, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = [\arctan(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$
   d'où $I_a = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\, dx$ **est convergente.**

4. Déterminer I_a.

   Réponse : Si on prend la paramétrisation du demi-cercle Γ_R donnée par $\Gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$, on a $dz = \Gamma'_R(t)dt = iR^{it}dt$.
   Comme $|F_a(z)| \leq \frac{e^{-a\mathfrak{Im}(z)}}{|z|^2-1} \leq \frac{1}{R^2-1}$ et que la longueur de Γ_R est égale à πR d'où

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}\, dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Alors , $\frac{\pi e^{-2}}{2} = \displaystyle\int_{\gamma_R} F_a(z)\, dz = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}\, dz + \int_{-R}^{R} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\, dx$, **par passage à la limite lorsque $R \to +\infty$ on obtient :**

$$\pi e^{-a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\, dx = I_a.$$

   i.e. $I_a = \pi e^{-a}$.

5. En déduire, la valeur de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2+1}\, dx$.

   Réponse :
   On a $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2+1}\, dx$, **car la fonction** $\frac{(\sin x)^2}{x^2+1}$ **est paire.**
   De la relation $(\sin x)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$, **on aura** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2+1}\, dx =$
   $\displaystyle\frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2+1}\, dx\right) = \frac{1}{4}(I_0 - I_2) = \frac{1}{4}(\pi - \pi e^{-2}) = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2}).$

Exercice 6.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{e^{it}}\,dt$.
   (on pourra utiliser $z = e^{it}$)
   <u>**Réponse :**</u>

   Si on pose, pour $t \in [0{,}2\pi]$**,** $z = \gamma(t) = e^{it}$ **alors :**
   $\frac{dz}{iz} = dt$**, d'où** $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{e^{it}}\,dt = \int_\gamma \frac{e^z}{iz}dz$
   Comme la fonction $f(z) = \frac{e^z}{iz}$ **a un unique pôle à l'intérieur du disque unité, 0 (pôle simple), son résidu est** $Res(f{,}0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z}{i}\right)'' = \frac{1}{i}$.
   D'après le théorème des résidus :

   $$\int_\gamma \frac{e^z}{iz}\,dz = 2i\pi\,(Res(f{,}0)) = 2i\pi.\frac{1}{i} = 2\pi.$$

2. (<u>question bonus</u>)
   Calculer $\displaystyle\int_{C^+(1{,}4)} \frac{1}{\sin z}\,dz$
   où $C^+(1{,}4)$ est le cercle de centre 1 et de rayon 4 orienté dans le sens positif.
   <u>**Réponse :**</u>
   Les pôles de $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ **sont les zéros de** $\sin z$ **i.e. les points** $z_k = k\pi$**,** $k \in \mathbb{Z}$**, tous ces pôles sont simples car** $(\sin(z))' = \cos(z)$ **et** $\cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0$.
   D'autre part, les pôles contenus dans l'intérieur du disque $D(1{,}4)$ **sont** $z_0 = 0$ **et** $z_1 = \pi$.
   D'après le théorème des résidus :

   $$\int_{C^+(1{,}4)} \frac{1}{\sin z}\,dz = 2i\pi\,(Res(f{,}0) + Res(f{,}\pi)) = 2i\pi.\frac{1}{i} = 2\pi.\left(\frac{1}{\cos 0} + \frac{1}{\cos \pi}\right) = 2\pi(1-1) = 0.$$