# Contrôle continu $n^o 2$

mercredi 29 avril 2009

Durée 1h

Documents et calculatrices interdits

*Exercice 1.* On pose $z = x + iy$, avec $x,y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que :
   $\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$, et que
   $\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$.
2. Déterminer les constantes $a$, $b$ et $c$ telle que la fonction $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$ soit holomorphe dans $\mathbb{C}$.
3. Déterminer les constantes $a$ et $b$ telle que la fonction

$$f(z) = \cos(x)\left(2\cosh(y) + a\sinh(y)\right) + i\sin(x)\left(2\cosh(y) + b\sinh(y)\right)$$

   soit holomorphe dans $\mathbb{C}$.
   Quelle est alors l'expression de $f$ en fonction de $z$?

*Exercice 2.*

1. Montrer que pour $t \in [0,\frac{\pi}{4}]$ on a $\sin(2t) \geq \dfrac{4}{\pi}t$.
2. Soit $R > 0$ et $\gamma_R : [0,\frac{\pi}{4}] \to \mathbb{C}$, définie par $\gamma_R(t) = Re^{it}$.
   Montrer que pour $z = \gamma_R(t)$, on a :

$$\left|e^{iz^2}\right| = e^{-R^2\sin(2t)}.$$

3. Montrer que

$$\left|\int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,dz\right| \leq \frac{\pi(1 - e^{-R^2})}{4R}.$$

4. En déduire $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,dz$.