Université de Rennes 1 Calcul différentiel et fonctions holomorphes
Année 2008-2009

Contrôle continu n^o2-Corrigé

Exercice 1. On pose $z = x + iy$, avec $x,y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que :
   $\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$, et que
   $\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$.
2. Déterminer les constantes a, b et c telle que la fonction $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$ soit holomorphe dans $\mathbb{C}$.
3. Déterminer les constantes a et b telle que la fonction

$$f(z) = \cos(x)\,(2\cosh(y) + a\sinh(y)) + i\sin(x)\,(2\cosh(y) + b\sinh(y))$$

   soit holomorphe dans $\mathbb{C}$.
   Quelle est alors l'expression de f en fonction de z?

Exercice 2.

1. Montrer que pour $t \in [0,\frac{\pi}{4}]$ on a $\sin(2t) \geq \dfrac{4}{\pi}t$.
2. Soit $R > 0$ et $\gamma_R : [0,\frac{\pi}{4}] \to \mathbb{C}$, définie par $\gamma_R(t) = Re^{it}$.
   Montrer que pour $z = \gamma_R(t)$, on a :

$$\left|e^{iz^2}\right| = e^{-R^2\sin(2t)}.$$

3. Montrer que

$$\left|\int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,dz\right| \leq \frac{\pi(1 - e^{-R^2})}{4R}.$$

4. En déduire $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,dz$.

Solution

Exercice 1. On pose $z = x + iy$, avec $x,y \in \mathbb{R}$.

1. $\sin(z) = \sin(x+iy) = \sin(x)\cos(iy)+\cos(x)\sin(iy) = \sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)$
   $\cos(z) = \cos(x+iy) = \cos(x)\cos(iy)-\sin(x)\sin(iy) = \cos(x)\cosh(y)-i\sin(x)\sinh(y)$.
2. $\Re e f = x + ay$ et $\Im m f = bx + cy$ sont des fonctions polynomiales, donc f est de classe C^∞, elle serait holomorphe si elle satisfait aux conditions de Cauchy-Riemann :
   $\frac{\partial \Re e f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \Im m f}{\partial y}(x,y), \qquad \frac{\partial \Re e f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial \Im m f}{\partial x}(x,y)$
   Pour cela il faudrait que $1 = c$ et $a = -b$.
   D'où $f(z) = x + ay + i(-ax + y) = (x + iy) - ai(x + iy) = (1 - ia)z$.
3. De même f est holomorphe si $-\sin(x)\,(2\cosh(y) + a\sinh(y)) = \sin(x)\,(2\sinh(y) + b\cosh(y))$ et $\cos(x)\,(2\sinh(y) + a\cosh(y)) = -\cos(x)\,(2\cosh(y) + b\sinh(y))$ ce qui équivaut à $-a = 2$ et $-2 = b$.
   D'où $f(z) = \cos(x)\,(2\cosh(y) - 2\sinh(y)) + i\sin(x)\,(2\cosh(y) - 2\sinh(y))$
   $= 2\left((\cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)) + i(\sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y))\right)$
   $= 2(\cos z + i\sin z) = 2e^{iz}$.

Exercice 2.

1. On fait une étude de la fonction $g(t) = \sin(2t) - \frac{4}{\pi}t$ dans l'intervalle $[0,\frac{\pi}{4}]$, on a $g'(t) = 2\cos(2t) - \frac{4}{\pi}$ et $g''(t) = -4\sin(2t)$ et le tableau de variation

t	0		α		$\frac{\pi}{4}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0

   D'où $g(t) = \sin(2t) - \frac{4}{\pi}t \geq 0$ dans l'intervalle $[0,\frac{\pi}{4}]$.
2. Pour $z = Re^{it}$, $z^2 = R^2e^{2it} = R^2\cos(2t) + iR^2\sin(2t)$, d'où
   $\left|e^{iz^2}\right| = e^{\Re e(iz^2)} = e^{-R^2\sin(2t)}$.
3. $$\left|\int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,dz\right| = \left|\int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,dz\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2(\cos(2t)+i\sin(2t))} iRe^{it}\,dt\right|$$

$$\leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| e^{iR^2(\cos(2t)+i\sin(2t))} \right| R\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin(2t)} R\,dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2\frac{4}{\pi}t}\,dt = \frac{\pi}{4}\frac{(1-e^{-R^2})}{R}.$$

4. $0 \leq \left| \int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,dz \right| \leq \frac{\pi}{4}\frac{(1-e^{-R^2})}{R} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$