Université de Rennes1 **L3-CDHO** Année 2011-2012

Corrigé Contrôle continu n^o2

Exercice 1 Soit $f(x,y) = \cos(x+y) - e^{(x-y)}$.

1. On vérifie que : f est de classe C^∞, $f(0,0) = 0$ et que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -\sin(x+y) + e^{x-y}|_{(x,y)=(0,0)} = 1 \neq 0$. Alors, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un intervalle de la forme $]-\delta,\delta[$ et une fonction $\varphi :]-\delta,\delta[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tels que $\varphi(0) = 0$ et pour tout $x \in]-\delta,\delta[$, $f(x,\varphi(x)) = 0$.
2. D'après 1), φ de classe C^∞ donc de classe C^2.
   On dérive par rapport à x l'identité $f(x,\varphi(x)) = 0$. On obtient :
   $$-(1+\varphi'(x))\sin(x+\varphi(x)) - (1-\varphi'(x))e^{x-\varphi(x)} = 0$$
   En $x = 0$, on aura $-(1-\varphi'(0)) = 0$ i.e $\varphi'(0) = 1$. On dérive une seconde fois l'dentité $f(x,\varphi(x)) = 0$, on trouve :
   $$-(1+\varphi'(x))^2\cos(x+\varphi(x)) - \varphi''(x)\sin(x+\varphi(x)) - (1-\varphi(x))^2e^{x-\varphi(x)}$$
   $$+\varphi''(x)e^{x-\varphi(x)} = 0$$
   En $x = 0$, on obtient $-2^2 + \varphi''(0) = 0$ i.e $\varphi''(0) = 4$.
3. D'après les calculs du 2), le développement limité à l'ordre 2 de $\varphi(x)$ en $x = 0$ est égal à
   $$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{1}{2}\varphi''(0)x^2 + o(x^2) = x + 2x^2 + o(x^2).$$
   Près du point $(0,0)$, l'ensemble $\{(x,y) \mid \cos(x+y) = e^{(x-y)}\}$ est représenté par le graphe de la fonction $g(x) = x + x^2$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$.

1. Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -2x(x+y)e^{-x^2-y^2} + e^{-x^2-y^2} = (-2x^2 - xy + 1)e^{-x^2-y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -2y(x+y)e^{-x^2-y^2} + e^{-x^2-y^2} = (-2y^2 - xy + 1)e^{-x^2-y^2}$ sont nulles si et seulement si $\begin{cases} -2x^2 - xy + 1 = 0 \\ -2y^2 - xy + 1 = 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x = y \\ x = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$ Ainsi, les points critiques de f sont les points $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

La matrice hessienne de f en (x, y) est la matrice

$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} (4x^3 + 4x^2y - 6x - 2y)e^{-x^2-y^2} & (4x^2y + 4xy^2 - 2x - 2y)e^{-x^2-y^2} \\ (4x^2y + 4xy^2 - 2x - 2y)e^{-x^2-y^2} & (4y^3 + 4xy^2 - 6y - 2x)e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix}.$

a) Au point $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -3e^{-\frac{1}{2}} & -e^{-\frac{1}{2}} \\ -e^{-\frac{1}{2}} & -3e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ dont le déterminant est égal à $8e^{-1} > 0$ et le mineur principal d'ordre 1 est égal à $-3e^{-\frac{1}{2}} < 0$, donc la hessienne $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est définie négative, ainsi $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est un maximum local de f.

b) Au point $(x, y) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $H_f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 3e^{-\frac{1}{2}} & e^{-\frac{1}{2}} \\ e^{-\frac{1}{2}} & 3e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ dont le déterminant est égal à $8e^{-1} > 0$ et le mineur principal d'ordre 1 est égal à $3e^{-\frac{1}{2}} > 0$, donc la hessienne $H_f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ est définie positive, ainsi $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ est un minimum local de f.

D'autre part, $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}}$ et $f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -e^{-\frac{1}{2}}$.

2. Les conditions d'extrémalité (multiplicateurs de Lagrange) sont données par le système $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2x^2 - xy + 1)e^{-x^2-y^2} = 2\lambda x \\ (-2y^2 - xy + 1)e^{-x^2-y^2} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} (-2x^2 - xy + 1)e^{-1} = 2\lambda x \\ (-2y^2 - xy + 1)e^{-1} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2x^2 - xy + 1)e^{-1} = 2\lambda x \\ x = y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
Les deux dernières équations nous donnent : les points $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. D'autre part $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}e^{-1}$ et $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}e^{-1}$, d'où f restreinte à C atteint son maximum en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et son minimum en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

3. Comme f est continue sa restriction au compact atteint ses bornes, d'où l'existence des extrema de la restriction de f à $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$ et ses extrema sont à déterminer parmis les points critiques à l'intérieur

et sur le bord du disque.

En comparant les valeurs de f aux points $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ on a :

$$-e^{-\frac{1}{2}} < -\sqrt{2}e^{-1} = -\sqrt{\frac{2}{e}}.e^{-\frac{1}{2}} < \sqrt{2}e^{-1} = \sqrt{\frac{2}{e}}.e^{-\frac{1}{2}} < e^{-\frac{1}{2}}$$

ainsi le maximum est atteint en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et vaut $e^{-\frac{1}{2}}$ et le minimum est atteint en $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ et vaut $-e^{-\frac{1}{2}}$.

Exercice 3 Soit $f(z) = z^2+2az\bar{z}+b\bar{z}^2$, où a et b sont des nombres complexes fixés.

1. Montrer que f est $\mathbb{C}$-dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

   Réponse : $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z^2+2az\bar{z}+b\bar{z}^2}{z} = \lim\limits_{z\to 0} z+2a\bar{z}+b\dfrac{\bar{z}^2}{z} = 0,$

   car $\left|\dfrac{\bar{z}^2}{z}\right| = |z| \to 0$ lorsque $z \to 0$.

   Donc f est $\mathbb{C}$-dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2. Montrer que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z si et seulement si $az + b\bar{z} = 0$

   Réponse : En notant $z = x + iy$, f est une application polynomiale (de degré 2) en x et y, c'est donc une application de classe C^1, donc f est $\mathbb{C}$-dérivable en z si et seulement si les équations de cauchy-Riemann sont vérifiées en ce point ce qui équivalent à $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

   Comme $\dfrac{\partial(z^2)}{\partial\bar{z}} = 0$, $\dfrac{\partial(az\bar{z})}{\partial\bar{z}} = az$ et $\dfrac{\partial(b\bar{z}^2)}{\partial\bar{z}} = 2b\bar{z}$, la condition $\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}} = 0$ s'écrit donc $2az + 2b\bar{z} = 0$ où encore $az + b\bar{z} = 0$.

3. Sous quelles conditions, sur a et b, f est-elle holomorphe sur un ouvert (non vide) de $\mathbb{C}$?

   Réponse : D'après ce qui précède, f est holomorphe sur un ouvert (non vide) de $\mathbb{C}$ si et seulement si l'équation $az + b\bar{z} = 0$ est satisfaite en tout point de cet ouvert.

   1er cas) Si $a = b = 0$, alors la condition est satisfaite en tout point de $\mathbb{C}$, donc f est holomorphe sur $\mathbb{C}$. En effet, dans ce cas $f(z) = z^2$.

   2eme cas) Supposons maintenant que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, alors $az + b\bar{z} = 0$ i.e. $az = -b\bar{z}$ ceci qui entraîne $|z|(|a| - |b|) = 0$

si $|b| \neq |a|$, seul 0 est solution, si $|b| = |a|$ l'ensemble des solutions est la droite d'angle $\frac{\theta}{2}$ où θ est l'argument de $-\frac{b}{a}$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions ne peut pas contenir d'ouvert non vide du plan.
Ainsi, f est holomorphe sur un ouvert (non vide) de $\mathbb{C}$ si et seulement si $a = b = 0$.