Université de Rennes1 **L3-CDHO** Année 2010-2011

Contrôle continu $n^o 2$
lundi 14 Mars 2011
Durée 1h
Documents et calculatrices interdits

La présentation et la rédaction seront prises en compte dans la notation.
Le barême est à titre indicatif.

Exercice 1
Soit $f(x, y) = x\cos(x + y) - \sin(x + y)$.

1. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et une fonction de classe C^2, $\varphi :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$
2. Déterminer le développement limité de φ à l'ordre 2 en $x = 0$.

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2$.

1. Déterminer la nature des points critiques de f.
2. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x, y, z) = 3x + 2y + z + 4$ et $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = 0\}$.
   (a) Vérifier que Dg ne s'annule pas sur S.
   (b) Déterminer l'unique point a en lequel la restriction de f à S est susceptible de présenter un extremum.
   (c) Montrer que pour tout $(x, y, z) \in S$ on a $f(x, y, z) = f(a) + \|(x, y, z) - a\|_2^2$.
   En déduire les extrema de la restriction de f à S.
   Que représente géométriquement $\sqrt{f(a)}$?

Exercice 3
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (e^y + e^z, e^x - e^z, x - y).$$

1. Montrer que la matrice jacobienne est inversible au point (x, y, z).
2. Montrer qu'au voisinage de tout point, f est un difféomorphisme.
3. (question bonus +2pts) f est-elle un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $f(\mathbb{R}^3)$?