
Contrôle continu $n^o 2$
Corrigé

Exercice 1
Soit $f(x, y) = x\cos(x + y) - \sin(x + y)$.

1. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et une fonction de classe C^2, $\varphi :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ tels que $\varphi(0) = \pi$ et pour tout $x \in]-\delta, \delta[, \quad f(x, \varphi(x)) = 0$.
   Réponse : On vérifie que : f est de classe C^2, $f(0, \pi) = 0$ et que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, \pi) = -x\sin(x + y) - \cos(x + y)|_{(x,y)=(0,\pi)} = -\cos(\pi) = 1 \neq 0$. Alors, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un intervalle de la forme $]-\delta, \delta[$ et une fonction $\varphi :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ de classe C^2 tels que $\varphi(0) = \pi$ et pour tout $x \in]-\delta, \delta[$, $f(x, \varphi(x)) = 0$.
2. Déterminer le développement limité de φ à l'ordre 2 en $x = 0$.
   Réponse : On dérive par rapport à x l'identité $f(x, \varphi(x)) = 0$. On obtient :

$$\cos(x+\varphi(x)) - x(1+\varphi'(x))\sin(x+\varphi(x)) - (1+\varphi'(x))\cos(x+\varphi(x)) = 0$$

En $x = 0$, on aura $-1 + (1 + \varphi'(0)) = 0$ i.e $\varphi'(0) = 0$. On dérive un seconde fois l'dentité $f(x, \varphi(x)) = 0$, on trouve :

$$-2(1+\varphi'(x))\sin(x+\varphi(x)) - x\varphi''(x)\sin(x+\varphi(x)) - x(1+\varphi(x))^2\cos(x+\varphi(x))$$
$$+(1 + \varphi(x))^2\cos(x + \varphi(x)) - \varphi''(x)\cos(x + \varphi(x)) = 0$$

En $x = 0$, on obtient $\varphi''(0) = 0$. Donc, le développement limité à l'ordre 2 de $\varphi(x)$ en $x = 0$ est égal à

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{1}{2}\varphi''(0)x^2 + o(x^2) = \pi + o(x^2)$$

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2$.

1. Déterminer la nature des points critiques de f.
   Réponse : Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2(x-1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2(y - 2)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2(z - 3)$ sont nulles si et seulement

si $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. **Ainsi,** f **a un seule point critique : le point** $(1, 2, 3)$. **Comme** $f(1, 2, 3) = 0$ **et** $f(x, y, z) \geqslant 0$ **pour tout** $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ **(somme de carrés), alors** $f(x, y, z) \geqslant f(1, 2, 3)$ **pour tout** $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$**, d'où** f **atteint son minimum global (strict) en** $(1, 2, 3)$.

2. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x, y, z) = 3x + 2y + z + 4$ et $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = 0\}$.

   (a) Vérifier que Dg ne s'annule pas sur S.

   Réponse :

   le gradient $\nabla g(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z)) = (3, 2, 1) \neq (0, 0, 0)$. **Ainsi** Dg **ne s'annule en aucun point de** $\mathbb{R}^3$**, en particulier ne s'annule pas sur** S.

   (b) Déterminer l'unique point a en lequel la restriction de f à S est susceptible de présenter un extremum.

   Réponse : Comme Dg **est ne s'annule pas sur** S**, on peut utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour déterminer** a.

$$\begin{cases} Df(x, y, z) = \lambda Dg(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1) = 3\lambda \\ 2(y-2) = 2\lambda \\ 2(z-3) = \lambda \\ 3x + 2y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

   Ce système a pour solution $\lambda = -2$**,** $x = -2$**,** $y = 0$ **et** $z = 2$. **ainsi** $a = (-2, 0, 2)$.

   (c) Montrer que pour tout $(x, y, z) \in S$ on a $f(x, y, z) = f(a) + \|(x, y, z) - a\|_2^2$.

   Réponse :

   $f(a) = f(-2, 0, 2) = (-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 = 14$. $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 14$ $\|(x, y, z) - a\|_2^2 = (x+2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z + 8$. **Ainsi,** $f(x, y, z) - f(a) - \|(x, y, z) - a\|_2^2 = -6x - 4y - 2z - 8 = -2(3x + 2y + z + 4) = 0$ **si** $(x, y, z) \in S$. **D'où l'égalité.**

   En déduire les extrema de la restriction de f à S.

   Réponse : Comme $\|(x, y, z) - a\|_2^2 \geqslant 0$ **alors**

   $f(x, y, z) = f(a) + \|(x, y, z) - a\|_2^2 \geqslant f(a)$ **d'où la restriction de** f **à** S **atteint son minimum global en** $a = (-2, 0, 2)$.

Que représente géométriquement $\sqrt{f(a)}$?
Réponse : $\sqrt{f(x,y,z)} = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2} = \|(x,y,z)-(1,2,3)\|_2$ **alors** $\sqrt{f(a)} = \min_{(x,y,z)\in S}\sqrt{f(x,y,z)} = \min_{(x,y,z)\in S}\|(x,y,z)-(1,2,3)\|_2$**, c'est donc la distance du point** $(1,2,3)$ **au plan affine** S **d'équation** $3x+2y+z+4=0$.

Exercice 3

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x,y,z) = (e^y+e^z, e^x-e^z, x-y).$$

1. Montrer que la matrice jacobienne est inversible au point (x,y,z).
   Réponse : $\det J_f(x,y,z) = \begin{vmatrix} 0 & e^y & e^z \\ e^x & 0 & -e^z \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -e^z(e^x+e^y) < 0.$
   comme le déterminant de la jacobienne de f **est non nul en tout point, la matrice jacobienne est inversible en tout point.**
2. Montrer qu'au voisinage de tout point, f est un difféomorphisme.
   Réponse : f **est de classe** C^1 **et de matrice jacobienne inversible en tout point, d'après le théorème d'inversion locale entraîne alors que** f **est un difféomorphisme local i.e. un difféomorphisme au voisinage de tout point.**
3. (question bonus +2pts) f est-elle un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $f(\mathbb{R}^3)$?
   Réponse : D'après le théorème d'inversion globale, f **est** $\mathcal{C}^1$ **difféomorphisme de classe** C^1 **si et seulement si** f **est un** C^1 **difféomorphisme local et injective.**
   On a montré que f **est un difféomorphisme local de classe** C^1**, il reste à montrer qu'elle est injective.**
   Soient (x,y,z) **et** $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$ **tels que** $f(x,y,z)=f(u,v,w)$.
   Alors $\begin{cases} e^y+e^z = e^v+e^w \\ e^x-e^z = e^u-e^w \\ x-y = u-v \end{cases}$
   Comme $x-y=u-v$ **est équivalent à** $e^{x-y}=e^{u-v}$ **d'où** $e^x = e^y\dfrac{e^u}{e^v}$.
   La somme des deux première équations donne $e^x+e^y=e^u+e^v$**,**
   et on obtient après substitution , $e^y\dfrac{e^u}{e^v}+e^y = e^u+e^v$ **i.e.** $e^y(1+$

$\frac{e^u}{e^v}) = e^v(1+\frac{e^u}{e^v})$ **ainsi,** $e^y = e^v$ **cequi donne** $y = v$ **et qui entraîne à son tour** $e^x = e^u$ **et** $e^z = e^w$ **i.e.** $x = u$ **et** $z = w$. **.**