Université de Rennes 1 — Calcul différentiel et fonctions holomorphes
Année 2008-2009

Contrôle continu $n^o 1$
mercredi 08 avril 2009
Durée 1h

Documents et calculatrices interdits

Exercice 1.

1) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2.
On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$,
où $f_1(x,y) = D_1 g(x,y)$ et $f_2(x,y) = D_2 g(x,y)$.
(autre notation $D_1 g = \frac{\partial g}{\partial x}$ et $D_2 g = \frac{\partial g}{\partial y}$.)
Montrer que f est de classe C^1. Comparer $D_2 f_1(x,y)$ et $D_1 f_2(x,y)$.

2) Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{xy(x+y)^2}{x^2+y^2},\ \sin(xy) \right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1.

3) Existe-il une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^2, telle que $f = Dg$? Justifier votre réponse.

Exercice 2.

Soient n un entier > 1 et $U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_i > 0, 1 \leq i \leq n\}$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \ln(x_i)$.

On pose $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in U | \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = n\}$.

1. Vérifier que S est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer les points critiques de la restriction de f à S.
3. Montrer que le sup de la restriction de f à S n'est pas atteint.
4. Etudier la nature du point critique dans les cas particuliers $n = 2$ et $n = 3$. Que vaut le sup de $f|_S$ dans ces cas ?