Université de Rennes 1 — Calcul différentiel et fonctions holomorphes

Année 2008-2009

Contrôle continu n^o1- Corrigé

Exercice 1.

1) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2.
On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$,
où $f_1(x,y) = D_1 g(x,y)$ et $f_2(x,y) = D_2 g(x,y)$.
(autre notation $D_1 g = \frac{\partial g}{\partial x}$ et $D_2 g = \frac{\partial g}{\partial y}$.)
Montrer que f est de classe C^1. Comparer $D_2 f_1(x,y)$ et $D_1 f_2(x,y)$.

2) Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{xy(x+y)^2}{x^2+y^2},\ \sin(xy) \right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1.

3) Existe-il une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^2, telle que $f = Dg$? Justifier votre réponse.

Exercice 2.

Soient n un entier > 1 et $U = \{(x_1, \ldots ,x_n) \in \mathbb{R}^n | x_i > 0, 1 \leq i \leq n\}$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, définie par $f(x_1, \ldots ,x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \ln(x_i)$.

On pose $S = \{(x_1, \ldots ,x_n) \in U | \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = n\}$.

1. Vérifier que S est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer les points critiques de la restriction de f à S.
3. Montrer que le sup de la restriction de f à S n'est pas atteint.
4. Etudier la nature du point critique dans les cas particuliers $n = 2$ et $n = 3$. Que vaut le sup de $f|_S$ dans ces cas ?

Exercice 1.

1) $f(x,y)$ est égale à $Dg(x,y)$ (sous forme matricielle). g est C^2 donc (par définition) Dg est C^1.
   g est C^2, donc d'après le théorème de symétrie de Schwarz on a $D_2D_1g(x,y) = D_1D_2g(x,y)$.
2) On note les composantes de f par f_1 et f_2 .
   f_2 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et f_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ étant composée,... de fonctions de classe C^1.
   On montre que f_1 est C^1 en $(0,0)$:
   $f_1(x,0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $D_1f_1(0,0) = 0$ (La dérivée partielle existe et sa valeur est 0).
   On a déjà observé que $D_1f_1(x,y)$ existe pour tout $(x,y) \neq (0,0)$. Un calcul montre que
   $$D_1f_1(x,y) = y + \frac{4xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$
   On montre (en utilisant par exemple les coordonnées polaires) que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_1f_1(x,y) = 0 = D_1f_1(0,0)$, donc D_1f_1 est continue en $(0,0)$. (Le calcul de $D_1f_1(x,y)$, $(x,y) \neq (0,0)$ est simplifié si on observe que $f(x,y) = xy + \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}$.)
   On montre de même (ou en utilisant la symétrie $f(x,y) = f(y,x)$) que D_2f_1 est continue en $(0,0)$.
   On a montré que les dérivées partielles de f_1 et f_2 existent et sont continues en tout point de $\mathbb{R}^2$, donc f est C^1.

3) Un tel g n'existe pas, sinon on aurait (Schwarz) $D_2f_1 = D_1f_2$.

Exercice 2.

1. Si on pose $g(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i - n$, g est alors polynomiale, donc de classe C^∞ et $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = 1$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, par suite $\operatorname{grad} g(x) = (1,\dots,1)$. Comme $\operatorname{grad} g(x) \neq (0,\dots,0)$, $Dg(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(h_1,\dots,h_n) \mapsto \sum_{i=1}^n h_i$ est surjective en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et en particulier en ceux de $S = g^{-1}(\{0\})$.
   Donc $S = g^{-1}(\{0\})$ est une sous-variété de classe C^∞ et de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$.
2. $x \in S$ est un point critique de la restriction de f à S si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Df(x) = \lambda Dg(x)$ c-à-d que pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$.

Comme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 1 + \ln(x_i)$, on doit donc résoudre le système de $n+1$ équations à n inconnues suivant : $\begin{cases} 1+\ln(x_i) & = \lambda \quad \text{pour } i \in \{1,\dots,n\} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i & = n \end{cases}$

L'unique solution est le point $(1,\dots,1)$, donc $(1,\dots,1)$ est l'unique point critique de la restriction de f à S.

3. Si le sup était atteint en un point $x_0 \in S$, x_0 serait un point critique de la restriction de f à S, donc $x_0 = (1,\dots,1)$. Pour $x = (x_1,\dots,x_n) \in S$, on a $x_n = n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i$ et $f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \ln(x_i) + (n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)\ln(n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)$.
Puisque $\lim_{x_i \to 0} x_i \ln(x_i) = 0$, on a
$\lim_{(x_1,\dots,x_{n-1})\to(0,\dots,0)} \sum_{i=1}^{n-1} x_i \ln(x_i) + (n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)\ln(n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i) = n\ln(n)$.
Comme $f(1,\dots,1) = 0$ et $n > 1$ on obtient

$$\lim_{(x_1,\dots,x_{n-1})\to(0,\dots,0)} f(x_1,\dots,x_{n-1},(n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)) = n\ln(n) > f(1,\dots,1).$$

Donc, le sup de $f|_S$ n'est pas atteint.

4. $\boxed{n=2}$ On a $S = \{(x,2-x) | 0 < x < 2\}$. La restriction de f à S est la fonction $g :]0,2[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x,2-x) = x\ln(x) + (2-x)\ln(2-x)$. On a $g'(x) = \ln(x) - \ln(2-x)$ et son tableau de variation,

x	0		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$2\ln 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2\ln 2$

Donc, le point $(1,1)$ est un minimum de $f|_S$ et le sup de $f|_S$ est égal à $2\ln 2$.
$\boxed{n=3}$ On a $S = \{(x,y,3-x-y) | 0 < x+y < 3, 0 < x, 0 < y\}$. La restriction de f à S est la fonction $h : V \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = f(x,y,3-x-y) = x\ln(x) + y\ln(y) + (3-x-y)\ln(3-x-y)$ où l'ouvert $V = \{(x,y) | 0 < x+y < 3, 0 < x, 0 < y\}$.
Un calcul directe nous donne

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3-x-y}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{y} + \frac{1}{3-x-y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{3-x-y}.$$

La hessienne de h au point $(1,1)$ est égale à $H_h(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Comme $\det H_h(1,1) = 3 > 0$ et $tr H_h(1,1) = 4 > 0$, $H_h(1,1)$ à 2 valeurs propres > 0, elle est donc définie positive, par suite le point (1,1,1) est un minimum de $f|_S$.
D'autre part, pour $(x,y) \in V$, on a $x\ln(x) + y\ln(y) \leq x\ln(x+y) + y\ln(x+y) = (x+y)\ln(x+y)$, d'où

$$h(x,y) = x\ln(x)+y\ln(y)+(3-x-y)\ln(3-x-y) \leq (x+y)\ln(x+y)+(3-x-y)\ln(3-x-y)$$

$h(x,y) \leq \ln(t) + (3-t)\ln(3-t)$, avec $t = x+y$.
Une étude de la fonction $t \mapsto t\ln(t) + (3-t)\ln(3-t)$ sur l'intervalle $]0,3[$ montre que le $\sup f|_S = \sup\{h(x,y)|(x,y) \in V\} = \sup\{t\ln(t) + (3-t)\ln(3-t)|t \in]0,3[\} = 3\ln 3$.
Remarque : D'après la question 3, $\sup f|_S \geq 3\ln 3$.