Université de Rennes1 **L3-CDHO** Année 2011-2012

Corrigé du contrôle continu $n^o 1$

Exercice 1

1. L'énoncé est faux.
   En effet, L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
   $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est continue, admet des dérivées partielles en $(0,0)$, mais n'est pas différentiable en $(0,0)$.

   On a $|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| = \left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leqslant |x| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$,
   donc f est continue en $(0,0)$.
   D'autre part, $\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = 0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = 0 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$
   d'où $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et $Df(0,0) = (0,0)$.
   Soit $\Delta(h,k) = \dfrac{f(h,k) - f(0,0) - Df(0,0)(h,k)}{\|(h,k)\|} = \dfrac{hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$,
   f est alors dfférentiable en $(0,0)$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \Delta(h,k) = 0$.
   Mais, $\Delta(h,h) = \dfrac{h^3}{(2h^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{h}{2^{\frac{3}{2}}|h|}$, n'a pas de limite lorsque h tend vers 0, donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
2. Enoncer le théorème de Schwarz.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que : $f(x,y) = x^2 \sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0,y) = 0$.

1. On a $|f(x,y) - f(0,y)| = |f(x,y)| = \left|x^2 \sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\right| \leqslant x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc f est continue en tout point de l'axe des y i.e. $\{0\} \times \mathbb{R}$.
   Sur l'ouvert formé des points en dehors de l'axe des y i.e. $x \neq 0$, f est de classe C^∞ comme composée de fonctions de classe C^∞. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2 = \{0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
2. Calculer les dérivées partielles de f en tout point $(0,y)$.
   Soit $(0,y)$ fixé. Alors $\displaystyle\lim_{t\to 0} \dfrac{f(t,y) - f(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{t^2 \sin\left(\frac{y}{t}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} t \sin\left(\dfrac{y}{t}\right) =$ 0. D'où $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0$.

D'autre part, $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{f(0,y+s)-f(0,y)}{s} = \lim\limits_{s\to 0} 0 = 0$. D'où $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$.

3. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

   Soit $(0,y)$ fixé. On pose $\Delta(h,k) = \dfrac{f(h,y+k)-f(0,y)-Df(0,y)(h,k)}{\|(h,k)\|} = \dfrac{h^2\sin\left(\frac{y+k}{h}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}$.

   Alors $|\Delta(h,k)| \leqslant \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \leqslant \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2} \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$. Donc f est différentiable en tout point $(0,y)$ i.e. sur $\{0\}\times\mathbb{R}$.

   Sur $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, on a déjà vu que f est de classe C^∞ donc y est différentiable.

   Ainsi f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

4. Déterminer le plus grand ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe C^1.

   On a déjà vu que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, donc de classe C^1 sur cet ouvert.

   Soit $(0,b)$ tel que $b \neq 0$. On va montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'est pas continue en $(0,b)$, par suite f n'est de classe C^1 en ce point.

   On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{y}{x}\right) - y\cos\left(\frac{y}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,b) = 0$

   Comme, $\lim_{(x,y)\to(0,b)} 2x\sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ et que $\cos\left(\frac{y}{x}\right)$ n'admet pas de limite lorsque $(x,y)\to(0,b)$, la limite $\lim_{(x,y)\to(0,b)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'existe pas, par suite f n'est pas continue en $(0,b)$.

   Ainsi, le plus grand ouvert sur lequel f est de classe C^1 est $U = \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

Exercice 3 On considère l'espace des matrices carrées d'ordre p, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, muni d'une norme $\|.\|$ telle que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\|A.B\| \leqslant \|A\|.\|B\|$. Soit $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ fixé. On considère l'application $f : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = A - \frac{1}{2}(A^2 - B)$.

1. On a fixé une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, ce choix a-t-il une incidence sur les propriétés de continuité ou de différentiabilité de f ?

   Non, car $\dim \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) = p^2$ et que sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

2. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle Df. F est une application polynomiale donc de classe C^∞, en particulier elle est différentiable.

   Soit $A, H \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ on a
   $f(A+H) - f(A) = \left(A + H - \frac{1}{2}((A+H)^2 - B)\right) - \left(A - \frac{1}{2}(A^2 - B)\right) = H - \frac{1}{2}\left(AH + HA + H^2)\right)$.

Isolons dans cette expression les termes linéaires en H :
on note $Df(A)$ l'application de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dans lui-même, définie par $Df(A).H = H - \frac{1}{2}(AH + HA)$ et $\varepsilon(H) = -\dfrac{H^2}{\|H\|}$ si $H \neq 0$ et $\varepsilon(0) = 0$.
Alors $f(A+H) - f(A) = Df(A).H - \frac{1}{2}H^2 = Df(A).H + \|H\|.\varepsilon(H)$, $H \mapsto H - \frac{1}{2}(AH + HA)$ est linéaire et $\|\varepsilon(H)\| \leqslant \|H\| \underset{H\to 0}{\longrightarrow} 0$
D'où f est différentiable en A et $Df(A)$ est sa différentielle.

3. On pose $U = \{A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \,|\, \|A - I\| < \frac{1}{2}\}$. Montrer que pour tout $A \in U$, pour tout $H \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ on a $\|Df(A).H\| \leqslant \frac{1}{2}\|H\|$.
   On a $Df(A).H = H - \frac{1}{2}(AH + HA) = \frac{1}{2}\left((I - A)H + H(I - A)\right)$, d'où $\|Df(A).H\| = \frac{1}{2}\|(I-A)H + H(I-A)\| \leqslant \frac{1}{2}\|(I-A)\|\|H\| + \frac{1}{2}\|H\|\|(I-A)\|$.
   Soit $A \in U$ i.e. $\|A - I\| < \frac{1}{2}$ alors
   $\|Df(A).H\| \leqslant \frac{1}{4}\|H\| + \frac{1}{4}\|H\| = \frac{1}{2}\|H\|$.
4. D'après le 3. $\|Df(A)\| \leqslant \frac{1}{2}$ et comme U est un ouvert convexe (c'est la boule ouvert de centre I et de rayon $\frac{1}{2}$), d'après le théorème des accroissements finis, pour tous $X, Y \in U$ on a pour tout $X, Y \in U$, on a $\|f(Y) - f(X)\| \leqslant \frac{1}{2}\|Y - X\|$.
5. (Question bonus)
   Soit $A \in U$ alors $\|f(A) - f(I)\| \leqslant \frac{1}{2}\|A - I\| < \frac{1}{4}$.
   D'autre part $\|f(I) - I\| = \|I - \frac{1}{2}(I - B) - I\| = \frac{1}{2}\|I - B\| < \frac{1}{4}$, car $B \in U$, d'où $\|f(A) - f(I)\| + \|f(I) - I\| < \frac{1}{2}$.
   Donc, si $A \in U$, on a $\|f(A) - I\| \leqslant \|f(A) - f(I)\| + \|f(I) - I\| < \frac{1}{2}$ i.e. $f(A) \in U$.
   Remarque : On voit que si $B \in U$, la restriction de l'application f à $\bar{U}$, la boule fermée de centre I et de rayon $\frac{1}{2}$, est contractante, elle admet alors un unique point fixe, i.e. il existe un unique $A \in \bar{U}$ tel que $f(A) = A$ ce qui est équivalent à $B = A^2$. Ainsi, pour tout B tel que $\|B - I\| < \frac{1}{2}$, l'équation $A^2 = B$ admet une solution unique dans $\bar{U} = \{A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \,|\, \|A - I\| \leqslant \frac{1}{2}\}$.