**Université de Rennes1** **L3-CDHO** Année 2010-2011

---

**Contrôle continu** $n^o 1$
lundi 07 février 2011
Durée 1h
Documents et calculatrices interdits

---

La présentation et la rédaction seront prises en compte dans la notation.
Le barême est à titre indicatif.

**Exercice 1** (7pts)
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (\sin(2x + y), e^{x+2y})$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3w^3, u^2 - 2v)$

1. Déterminer les matrices jacobiennes de $f$ et $g$.
2. Déterminer $h = f \circ g$ et sa matrice jacobienne au point $(1, -1, 0)$.
3. Déterminer la dérivée directionnelle de $h$ au point $(1, -1, 0)$ suivant le vecteur $e = (2, 1, 3)$.

**Exercice 2** (6pts)

1. Soit $f : ]0, 1[\times]1, 3[\to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = \dfrac{1}{x + y + 1}$.
   Dire pourquoi $f$ est lipschitzienne.
   Montrer que pour tous $(x_0, y_0)$ et $(x_1, y_1) \in ]0, 1[\times]1, 3[$
   $$\|f(x_0, y_0) - f(x_1, y_1)\|_2 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}.\|(x_0 - x_1, y_0 - y_1)\|_2.$$
2. Pour $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y, z) = e^{-2x^2-y^4-3z^2}$, déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^3$ dans lequel elle est lipschitzienne.

**Exercice 3** (7pts)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :
$f(x, y) = \dfrac{(xy)^\alpha}{x^2 - xy + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que $x^2 - xy + y^2$ ne s'annule qu'en $(0, 0)$ et en déduire que $f$ est bien définie.
2. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$, $f$ est-elle :
   (a) continue sur $\mathbb{R}^2$?
   (b) différentiable sur $\mathbb{R}^2$?
   (c) de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$? (question bonus + 2pts)