Université de Rennes1 **L3-CDHO** Année 2010-2011

Contrôle continu $n^o 1$
Corrigé

Exercice 1
Réponse :

1.
$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\cos(2x+y) & \cos(x+y) \\ e^{x+2y} & 2e^{x+2y} \end{pmatrix}$$
$$J_g(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 4v & 9w^2 \\ 2u & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $h(u,v,w) = f \circ g(u,v,w) = (\sin(2u+4v^2+6w^3+u^2-2v), e^{u+2v^2+3w^3+2u^2-4v})$
$$J_h(1,-1,0) = J_f(g(1,-1,0)).J_g(1,-1,0) = J_f(3,3).J_g(1,-1,0)$$
$$= \begin{pmatrix} 2\cos(9) & \cos(9) \\ e^9 & 2e^9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos(9) & -10\cos(9) & 0 \\ 5e^9 & -8e^9 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Comme h est différentiable en $(1,-1,0)$ on a :
$$D_e h(1,-1,0) = J_h(1,-1,0).e = \begin{pmatrix} 4\cos(9) & -10\cos(9) & 0 \\ 5e^9 & -8e^9 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cos(9) \\ 2e^9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2
Réponse :

1. Comme $(x,y) \to x+y+1$ est polynomiale et ne s'annule pas dans $U =]0,1[\times]1,3[$, la fonction f est alors différentiable sur U (elle est même de classe C^∞).
On a $J_f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = (-\frac{1}{(x+y+1)^2}, -\frac{1}{(x+y+1)^2})$. Si on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|.\|_2$, $\|Df(x,y)\| = \|J_f(x,y)\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{(x+y+1)^2}$. Pour $(x,y) \in]0,1[\times]1,3[$, $x+y+1 \geqslant 2$, d'où $\|Df(x,y)\| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}$. Finalement, comme l'ouvert $U =]0,1[\times]1,3[$ est convexe et que $\|Df(x,y)\| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}$ dans U, f est lipschitzienne de rapport $\frac{\sqrt{2}}{4}$ dans U i.e. pour tous (x_0,y_0) et $(x_1,y_1) \in]0,1[\times]1,3[$
$$\|f(x_0,y_0) - f(x_1,y_1)\|_2 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}.\|(x_0-x_1, y_0-y_1)\|_2.$$

2. g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$, comme composée de fonctions de classe C^∞, $g = G \circ F$ où $F : (x,y,z) \mapsto -2x^2 - y^4 - 3z^2$ et $G : t \mapsto e^t$.
   Si on munit $\mathbb{R}^3$ de la norme euclidienne, $\|Dg(x,y,z)\| = \|J_g(x,y,z)\|_2 = \|(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z))\|_2 = (16x^2 + 16y^6 + 36z^2)^{\frac{1}{2}}\, e^{-2x^2-y^4-3z^2}$.
   Comme $(16x^2 + 16y^6 + 36z^2)^{\frac{1}{2}}\, e^{-2x^2-y^4-3z^2} = \dfrac{(16x^2 + 16y^6 + 36z^2)^{\frac{1}{2}}}{e^{2x^2+y^4+3z^2}}$ sa limite lorsque $\|(x,y,z)\|_2$ tend vers $+\infty$ est 0, elle est donc bornée i.e. il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on ait $(16x^2 + 16y^6 + 36z^2)^{\frac{1}{2}}\, e^{-2x^2-y^4-3z^2} \leqslant K$.
   Ainsi, $\|Dg(x,y,z)\| \leqslant K$ sur $\mathbb{R}^3$, qui est un ouvert convexe, d'après le théorème des accroissements finis, f est lipschitzienne de rapport K dans $\mathbb{R}^3$, qui est donc le plus grand ouvert dans lequel elle est lipschitzienne.

Exercice 3
Réponse :

1. On a $x^2 - xy + y^2 = (x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$, d'où $x^2 - xy + y^2 = 0$ si et seulement si $\begin{cases} x - \frac{1}{2}y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ donc si et seulement si $x = y = 0$.
   Puisque f est le quotient sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$ de 2 fonctions dont le dénominateur ne s'annule, elle est bien définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ (et même) et comme $f(0,0) = 0$, elle est bien définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. On remarquera que f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ puisque la fonction $(x,y) \mapsto x^2 - xy + y^2$ est polynomiale donc de classe C^∞ et $(x,y) \mapsto (xy)^\alpha$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.
   Il ne reste donc plus qu'a l'étudier f à l'origine $(0,0)$.

(a) Pour $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ où $r = \sqrt{x^2+y^2}$, on a
$|f(x,y)| = \dfrac{r^{2\alpha}|\cos\theta\sin\theta|^\alpha}{r^2(1-\cos\theta\sin\theta)} = r^{2\alpha-2}\dfrac{|\cos\theta\sin\theta|^\alpha}{1-\cos\theta\sin\theta} \leqslant r^{2\alpha-2}$
car, $\frac{1}{2} \geqslant \cos\theta\sin\theta = \frac{\sin 2\theta}{2} \geqslant \frac{-1}{2}$ et par suite $1 - \cos\theta\sin\theta \geqslant \frac{1}{2}$. Ainsi, une condition suffisante pour la continuité en $(0,0)$ est que $\lim\limits_{r\to 0^+} r^{2\alpha-2} = f(0,0) = 0$ et cette dernière est vérifiée si et seulement si $\alpha > 1$. Cette condition est nécessaire, car pour que $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{2\alpha}}{y^2} = \lim\limits_{x\to 0} x^{2\alpha-2} = 0$ il faut que $\alpha > 1$. En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha > 1$.

(b) On va donc étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$, en supposant que $\alpha > 1$.

Alors $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ et utilisant la symétrie, on aura $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Ainsi, f est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ i.e. si et seulement si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(xy)^\alpha}{(x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ donc si et seulement si pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{r\to 0^+} r^{(2\alpha-3)} \dfrac{|\cos\theta\sin\theta|^\alpha}{1-\cos\theta\sin\theta} = 0$ i.e. si $2\alpha > 3$.

D'où f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha > \frac{3}{2}$.

(c) Il faudrait montrer que les dérivées partielles sont continues en $(0,0)$ et par la symétrie de la formule de f par rapport à x et y. Il suffit d'étudier quand $\lim\limits_{(x,y)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Un calcul direct nous donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(\alpha-2)x^{\alpha+1}y^\alpha + (1-\alpha)x^\alpha y^{\alpha+1} + \alpha x^{\alpha-1}y^{\alpha+1}}{(x^2-xy+y^2)^2}$$

d'où $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right| = r^{(2\alpha-3)} \frac{|(\alpha-2)(\cos\theta)^{\alpha+1}(\sin\theta)^\alpha + (1-\alpha)(\cos\theta)^\alpha(\sin\theta)^{\alpha+1} + \alpha(\cos\theta)^{\alpha-1}(\sin\theta)^{\alpha+1}|}{1-\cos\theta\sin\theta}$ en utilisant l'inégalité triangulaire, on voit que

$$|(\alpha-2)(\cos\theta)^{\alpha+1}(\sin\theta)^\alpha + (1-\alpha)(\cos\theta)^\alpha(\sin\theta)^{\alpha+1} + \alpha(\cos\theta)^{\alpha-1}(\sin\theta)^{\alpha+1}| \leqslant (3\alpha+3)$$

Un argument similaire au (b), permet d'affirmer que $\lim\limits_{(x,y)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{r\to 0^+} r^{(2\alpha-3)} = 0$ i.e. $\alpha > \frac{3}{2}$.

Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha > \frac{3}{2}$.