Université de Rennes1 **L3-CDHO** Année 2009-2010

Contrôle continu $n^o 2$

lundi 15 Mars 2010

Durée 1h

Documents et calculatrices interdits

La présentation et la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1 –

1. Donner une preuve ou un contre-exemple de l'énoncé suivant :
   " Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et admet un inverse $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\det(Df(x)) \neq 0$ "
2. i) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2y^2, y + 2x)$.
   Déterminer l'ensemble U des points de $\mathbb{R}^2$ au voisinage desquels f admet un inverse local de classe C^1.

   ii) Evaluer f aux points $(1, -2)$ et $(-1, 2)$.
   L'application $f_{|U} : U \to f(U)$ est-elle un difféomorphisme ?

Exercice 2 –

1. Montrer que la relation $y - x - 2xy^3 = 0$ définit implicitement au voisinage de $(0, 0)$ une fonction φ de classe C^∞ telle que $\varphi(0) = 0$ et $y = \varphi(x)$.
2. Déterminer le développement limité de φ à l'ordre 2 en 0.
3. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\varphi(x) - x}{x^2}$.

Exercice 3 – Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x + y)^2 - 4x^3 + x^4$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Déterminer la nature des points critiques.
3. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 4$ et $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = 0\}$.
   (a) Vérifier que Dg ne s'annule pas sur S.
   (b) Déterminer les points critiques de la restriction de f à S.
   (c) **Question Bonus :** Montrer que les extrema de la restriction de f à S sont atteints et les déterminer.