Université de Rennes1 **L3-CDHO** Année 2009-2010

Contrôle continu $n^o 2$
Corrigé

Exercice 1 –

1. Donner une preuve ou un contre-exemple de l'énoncé suivant :
" Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et admet un inverse $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\det(Df(x)) \neq 0$ "
Réponse : La proposition est vraie. En effet, si f est un difféomorphisme de classe C^1, il admet un inverse de classe C^1, i.e. il existe une application de classe C^1 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $f \circ g = g \circ f = I$ où I est l'application identité de $\mathbb{R}^n$, $(I(x) = x)$.
Alors, pour $x \in \mathbb{R}^n$, le théorème des applications composées donne, $Dg(f(x)) \circ Df(x) = DI(x) = I$, car I est linéaire. Ainsi, l'application linéaire $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est inversible et donc son déterminant est non nul.
2. i) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^2y^2, y + 2x)$.
Déterminer l'ensemble U des points de $\mathbb{R}^2$ au voisinage desquels f admet un inverse local de classe C^1.
Réponse : D'après le théorème d'inversion locale, U est l'ensemble des points (x,y) tels que $\det(Df(x,y)) \neq 0$. $Df(x,y)$ est représentée dans la base canonique par la matrice Jacobienne
$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2 & 2x^2y \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, dont le déterminant est égal à $2xy^2 - 4x^2y = 2xy(y-2x)$.
D'où $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2xy(y-2x) \neq 0\}$.
ii) Evaluer f aux points $(1,-2)$ et $(-1,2)$.
L'application $f_{|U} : U \to f(U)$ est-elle un difféomorphisme ?
Réponse : $f(1,-2) = (4,0) = f(-1,2)$.
Comme $(1,-2)$ et $(-1,2)$ sont des points de U, l'application $f_{|U} : U \to f(U)$ n'est alors n'est pas injective, a fortiori n'est pas bijective, donc ce n'est pas un difféomorphisme.

Exercice 2 –

1. Montrer que la relation $y - x - 2xy^3 = 0$ définit implicitement au voisinage de $(0,0)$ une fonction φ de classe C^∞ telle que $\varphi(0) = 0$ et $y = \varphi(x)$.
   Réponse : On pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = y - x - 2xy^3$. On constate que $f(0,0) = 0$ et que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 - 6xy^2|_{(0,0)} = 1 \neq 0$; d'après le théorème des fonctions implicites, il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction (de classe C^∞) $\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ tels que : $\varphi(0) = 0$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.
2. Déterminer le développement limité de φ à l'ordre 2 en 0.
   Réponse : En dérivant la relation $\varphi(x) - x - 2x\varphi(x)^3 \equiv 0$, sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ deux fois on obtient :
$$\varphi'(x) - 1 - 2\varphi(x)^3 - 6x\varphi'(x)\varphi(x)^2 = 0$$
$$\varphi''(x) - 12\varphi'(x)\varphi(x)^2 - 6x\varphi''(x)\varphi(x)^2 - 12x\varphi'(x)^2 = 0$$
   En particulier au point $x = 0$, où $\varphi(0) = 0$, on obtient :
   $\varphi'(0) - 1 = 0$ et $\varphi''(0) = 0$.
   D'où, le développement à l'ordre 2 en $x = 0$ de φ :
   $\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = x + o(x^2)$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - x}{x^2}$.
   Réponse : Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$.

Exercice 3 – Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x+y)^2 - 4x^3 + x^4$.

1. Déterminer les points critiques de f.
   Réponse : Les points critiques de f sont les solutions du système $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = 2(x+y) - 12x^2 + 4x^3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 2(x+y) = 0 \end{cases}$.
   D'où f a pour points critiques $(0,0)$ et $(3,-3)$.
2. Déterminer la nature des points critiques.
   Réponse : La matrice hessienne de f en (x,y) est la matrice
   $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 24x + 12x^2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$,

a) Au point $(x, y) = (0, 0)$, $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est nul. les résultats du cours ne permettent pas de conclure.
Mais, $f(0, y) = y^2 \geqslant 0$ et $f(-x, x) = -12x^2 - 4x^3$ est strictement négatif si $x > 0$, ainsi f change de signe au voisinage de $(0, 0)$ donc $(0, 0)$ est un point selle.

a) Au point $(x, y) = (3, -3)$, $H_f(3, -3) = \begin{pmatrix} 38 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est égal à $72 > 0$ et le mineur principal d'ordre 1 est égal à $38 >$, donc la hessienne $H_f(3, -3)$ est définie positive, ainsi $(3, -3)$ est un minimum pour f.

3. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 4$ et $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = 0\}$.
   (a) Vérifier que Dg ne s'annule pas sur S.
   Réponse : Le gradient de g est égal à $(4x + 2y, 2x + 2y)$ et ne s'annule qu'au point $(0, 0)$ qui n'est pas un point de S, d'où Dg ne s'annule pas sur S.
   (b) Déterminer les points critiques de la restriction de f à S.
   Réponse : Les points critiques de la restriction de f à S, sont solutions du sytème $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$

   ou encore $\begin{cases} 2(x + y) - 12x^2 + 4x^3 = \lambda(4x + 2y), \\ 2(x + y) = 2\lambda(x + y) \\ 2x^2 + 2xy + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$
   La deuxième équation a pour solution $\lambda = 1$ ou $y = -x$.
   i) Pour $\lambda = 1$, la première équation devient $x(2x^2 - 6x - 1) = 0$ qui pour solutions 0, $\frac{3+\sqrt{11}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{11}}{2}$.
   Mais, $g(x, y) = (x + y)^2 + x^2 - 4 = 0$, entraîne que $|x| \leqslant 2$ et $y = -x \pm \sqrt{4 - x^2}$.
   Comme $\frac{3+\sqrt{11}}{2} > 3$ cette valeur de x n'est pas à retenir.
   On trouves les couples (x, y) tels que $x \in \{0, \frac{3-\sqrt{11}}{2}\}$ et $y = -x \pm \sqrt{4 - x^2}$ sont des points critiques.
   ii) Pour $y = -x$, on a $g(x, -x) = x^2 - 4 = 0$ i.e. $x = \pm 2$ et donc $(2, -2)$ et $(-2, 2)$ sont aussi des points critiques.

(c) **Question Bonus :** Montrer que les extrema de la restriction de f à S sont atteints et les déterminer.

Réponse : S est un compact de $\mathbb{R}^2$. En effet, $S = g^{-1}(0)$ est fermée, car g est continue. D'autre part, pour $(x, y) \in S$, $g(x, y) = 2x^2+2xy+y^2-4 = (x+y)^2+x^2-4 = 0$ d'où $(x+y)^2 \leqslant 4$ et $x^2 \leqslant 4$, ce qui entraîne $x \in [-2, 2]$ et $y \in [-4, 4]$. Ainsi $S \subset [-2, 2]\times[-4, 4]$ est bornée.

Comme f est continue sa restriction au compact S atteint ses bornes, d'où l'existence des extrema de la restriction de f à S, et ses extrema sont parmis les points critiques.

En évaluant f aux points critiques de la questions précédentes on trouve que le maximum est atteint en $(-2, 2)$ et vaut $f(-2, 2) = 48$ et le minimum est atteint en $(2, -2)$ et vaut $f(2, -2) = -16$.