Université de Rennes1 **L3-CDHO** Année 2009-2010

Contrôle continu n^o1
lundi 08 février 2010
Durée 1h
Documents et calculatrices interdits

La présentation et la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1 – Donner une preuve ou un contre-exemple de l'énoncé suivant : " $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable en un point (x_0, y_0) si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existent."

Exercice 2 – On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|.\|_2$. Soit $a > 0$ et $f :]a, +\infty[\times]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = e^{-x} - e^{-y}$.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in]a, +\infty[\times]a, +\infty[$,
$$\|Df(x, y)\| \leqslant \sqrt{2}e^{-a}.$$
2. Soit $t > 0$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f entre les points $(2a, a + t)$ et $(a + t, 2a)$ en déduire l'inégalité :
$$\left|e^{-a} - e^{-t}\right| \leqslant |a - t|.$$

Exercice 3 –

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Donner la définition de la différentiabilité de f en un point.
2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable en 0. On suppose que $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $Df(0) = 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :
$f(x, y) = \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.
   (a) Etudier la continuité de f en $(0, 0)$.
   (b) Etudier la différentiabilité de f en $(0, 0)$, déterminer le cas échéant la différentielle $Df(0, 0)$.