Université de Rennes1 **L3-CDHO** Année 2009-2010

Contrôle continu n^o1
Corrigé

La présentation et la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1 – Donner une preuve ou un contre-exemple de l'énoncé suivant : "$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable en un point (x_0, y_0) si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existent."

Réponse : La proposition est fausse : voici deux contre-exemples :

1.
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy \neq 0 \\ 1 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existent et valent 0, mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$ (elle n'est même pas continue).
Par exemple $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x,x) = 0 \neq 1 = f(0,0)$.

2.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existent et valent 0, mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$ (elle n'est même pas continue) .
Par exemple $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x,x) = \dfrac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$.

Exercice 2 – On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|.\|_2$. Soit $a > 0$ et $f :]a, +\infty[\times]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = e^{-x} - e^{-y}$.

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in]a, +\infty[\times]a, +\infty[$,
$$\|Df(x,y)\| \leqslant \sqrt{2} e^{-a}.$$

Réponse : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -e^{-x}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-y}$

Ainsi $\|Df(x,y)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2} = \sqrt{e^{-2x}+e^{-2y}}$.

Comme $t \mapsto e^{-2t}$ est décroissante sur $]a,+\infty[$,
$\|Df(x,y)\| = \sqrt{e^{-2x}+e^{-2y}} \leqslant \sqrt{e^{-2a}+e^{-2a}} = \sqrt{2}e^{-a}$.

2. Soit $t > 0$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f entre les points $(2a, a+t)$ et $(a+t, 2a)$ en déduire l'inégalité :

$$\left|e^{-a} - e^{-t}\right| \leqslant |a-t|.$$

Réponse : Comme $U =]a,+\infty[\times]a,+\infty[$ est convexe, (le segment d'origine $(2a, a+t)$ et d'extrémité $(a+t, 2a)$ est contenu dans U), on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis pour obtenir

$$|f(2a,a+t) - f(a+t,2a)| \leqslant \sup_{(x,y)\in U} \|Df(x,y)\|.\|(2a,a+t)-(a+t,2a)\|$$

Mais, $f(2a,a+t) - f(a+t,2a) = (e^{-2a} - e^{-(a+t)}) - (e^{-(a+t)} - e^{-2a}) = 2(e^{-2a} - e^{-(a+t)}) = 2e^{-a}(e^{-a} - e^{-t})$, d'où $|f(2a,a+t) - f(a+t,2a)| = 2e^{-a}|e^{-a} - e^{-t}|$ et $\|(2a,a+t)-(a+t,2a)\| = \|(a-t,t-a)\| = \sqrt{2}|a-t|$.
Finalement en utilisant la borne sur la norme de la différentielle trouvée en 1. on a $2e^{-a}|e^{-a}-e^{-t}| \leqslant \sqrt{2}e^{-a}.\sqrt{2}|a-t| = 2e^{-a}|a-t|$, d'où
$|e^{-a}-e^{-t}| \leqslant |a-t|$.

Exercice 3 –

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Donner la définition de la différentiabilité de f en un point.
2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable en 0. On suppose que $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $Df(0) = 0$.

   Réponse :
   Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par $g(x) = -x$. L'application g est linéaire et donc de classe C^∞ et $Dg = g = -I$ où I est l'application identité de $\mathbb{R}^n$.

   D'après le théorème des fonctions composées $f \circ g$ est différentiable en 0 et $D(f \circ g)(0) = Df(g(0)) \circ Dg(0) = -Df(g(0)) \circ I = -Df(0)$.
   Par hypothèse, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = f(-x)$ i.e. $f = f \circ g$ d'où $Df(0) = Df(g(0)) \circ Dg(0) = -Df(0)$ donc $Df(0) = 0$.
   Autre preuve : f différentiable en 0 entraîne que $\lim_{x\to 0} \frac{\|f(x)-f(0)-Df(0).x\|}{\|x\|} =$

0 et en remplaçant x par $-x$ on aura $\lim_{x\to 0} \frac{\|f(-x)-f(0)-Df(0).(-x)\|}{\|-x\|} = 0$. Maintenant, l'hypotèse $f(x) = f(-x)$ et la linéarité de $Df(0)$, nous donnent : $\lim_{x\to 0} \frac{\|f(x)-f(0)+Df(0).x\|}{\|x\|} = 0$. Ainsi, $\lim_{x\to 0} \frac{\|2.Df(0).x\|}{\|x\|} = \lim_{x\to 0} \frac{\|(f(x)-f(0)+Df(0).x)-(f(x)-f(0)-Df(0).x)\|}{\|x\|} \leqslant \lim_{x\to 0} \frac{\|f(x)-f(0)+Df(0).x\|}{\|x\|} + \lim_{x\to 0} \frac{\|f(x)-f(0)-Df(0).x\|}{\|x\|} = 0$ d'où $\lim_{x\to 0} \frac{\|Df(0).x\|}{\|x\|} = 0$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et $t \in \mathbb{R}_+^*$, alors $Df(0)(tx_0) = tDf(x_0)$ et $\|tx_0\| = t\|x_0\|$, d'où $\frac{\|Df(0).(tx_0)\|}{\|tx_0\|} = \frac{\|Df(0).x_0\|}{\|x_0\|}$ ainsi $0 = \lim_{t\to 0} \frac{\|Df(0).(tx_0)\|}{\|tx_0\|} = \frac{\|Df(0).x_0\|}{\|x_0\|}$. On a montré que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\|Df(0).x_0\| = 0$, d'où $Df(0) = 0$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :
   $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
   (a) Etudier la continuité de f en $(0,0)$.

   Réponse : Puisque $y^2 \leqslant x^2+y^2$, $|f(x,y)| = \left|\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}\right| \leqslant |xy| \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$, ainsi $\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, d'où la continuité de f en $(0.,0)$

   (b) Etudier la différentiabilité de f en $(0,0)$, déterminer le cas échéant la différentielle $Df(0,0)$.

   Réponse : On va calculer les dérivées partielles de f en $(0,0)$.
   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ et $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0-0}{y} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$ ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
   Maintenant que les dérivées partielles existent, on doit étudier
   $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y|}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\frac{xy^3}{x^2+y^2}|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
   D'après l'inégalité en (a), $\left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, on a $\dfrac{|\frac{xy^3}{x^2+y^2}|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ ainsi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|\frac{xy^3}{x^2+y^2}|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = 0$, d'où la différentiabilité de f en $(0,0)$ et $Df(0,0) = 0$.