
M2 MEEF : TD4

Exercice 1.

1. Calculer par récurrence $(1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4) \cdots (1 + X^{2^n})$.
2. Montrer que, si les trois polynômes P, Q, R de $\mathbb{R}[X]$ vérifient la relation

$$P^2(X) - XQ^2(X) = XR^2(X),$$

ils sont nuls. Est-ce encore vrai dans $\mathbb{C}[X]$?

3.

- i) Trouver $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que : $a(X+2)(X+3) + b(X+1)(X+3) + c(X+1)(X+2) = X$,
 - ii) Trouver $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que : $a(X+5)(X+3) + b(X+1)(X+3) + c(X+1)(X+5) = X^4$.
-

Exercice 2.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant : $P(0) = 0$ et $P(X^2 + 3) = P^2(X) + 3$.

- 1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 3 \end{cases}$$
 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

- 2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(u_n) = u_n$.
 - 3) En déduire que $P(X) = X$.
-

Exercice 3.

On a les informations suivantes sur le polynôme P :
c'est un polynôme unitaire à coefficients réels de degré 10, son terme constant est 18 :

$$P = X^{10} + ??? + 18,$$

1 est racine de multiplicité 4,

2 et 3 sont racines doubles et $-\frac{1}{4}$ est racine simple.

1. Quelle est la racine de P qui manque ?
 2. Quel est le coefficient de X^9 dans P ?
-

Exercice 4.

On pose $P = X^5 + 2X^4 - 2X^3 - 4X^2 + X + 2$, $Q = X^5 - 2X^4 - X^3 + 2X^2$ et $F = \frac{P}{Q}$.

1. Déterminer les racines rationnelles de P ainsi que leurs multiplicités.
2. Quel est le pgcd unitaire de P et Q ?
3. Mettre la fraction rationnelle F sous forme réduite.
4. Décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
5. Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^1 F(x) dx$

Exercice 5.

Déterminer les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que :
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{15} \\ xyz = -15 \end{cases}$$

Exercice 6.

Soient a et b deux entiers strictement positifs. Quel est le pgcd de $X^a - 1$ et $X^b - 1$?

Solution : La division euclidienne de a par b donne $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

Alors $X^a - 1 = X^{bq+r} - 1 = X^{bq+r} - X^r + X^r - 1 = X^r(X^{bq} - 1) + X^r - 1$
 $= X^r(X^b - 1)(X^{b(q-1)} + X^{b(q-2)} + \dots + X^b + 1) + X^r - 1$ d'où $X^a - 1 = (X^b - 1)Q + R$,
avec $Q = X^r(X^{b(q-1)} + X^{b(q-2)} + \dots + X^b + 1)$ et $R = X^r - 1$. Comme $\deg(R) = r < \deg(X^b - 1) = b$, on obtient ainsi la division euclidienne de $X^a - 1$ par $X^b - 1$, par suite

$$\text{PGCD}(X^a - 1, X^b - 1) = \text{PGCD}(X^b - 1, X^r - 1)$$

Ainsi, en suivant l'algorithme d'Euclide calculant le pgcd de a et b , on trouve

$$\text{PGCD}(X^a - 1, X^b - 1) = X^{\text{pgcd}(a,b)} - 1.$$

Exercice 7.

Soit $P(X) = 2X^4 + 5X^3 + 3X^2 + X - 2$.

1. Déterminer les racines rationnelles de P .
2. Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Trouver l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ vérifiant l'inégalité

$$2x^4 + 5x^3 + 3x^2 + x - 2 < 0.$$

Solution :

1. Les racines rationnelles de $P = 2X^4 + 5X^3 + 3X^2 + X - 2$ sont de la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers premiers entre eux, $p > 0$, p diviseur de 2 et q diviseur de 2. Les candidats sont donc $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$. On vérifie que seules -2 et $\frac{1}{2}$ sont racines. Ainsi, les racines rationnelles de P sont -2 et $\frac{1}{2}$.
2. Le quotient de P par $(X + 2)(2X - 1) = 2X^2 + 3X - 2$ est $X^2 + X + 1$ irréductible sur $\mathbb{R}$. Donc la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ est

$$P = (X + 2)(2X - 1)(X^2 + X + 1),$$

3. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $2x^4 + 5x^3 + 3x^2 + x - 2 < 0$ est celui de $(x + 2)(2x - 1) < 0$ qui n'est autre que l'intervalle $] -2, \frac{1}{2}[$.

Exercice 8.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Posons $P = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$.

1. Calculer $P - P'$
2. Montrer que toutes les racines complexes de P sont simples.

Solution :

1. On a $P - P' = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} = \frac{X^n}{n!}$
2. Supposons, par l'absurde, que P possède est une racine multiple α , alors $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. Par suite, $0 = P(\alpha) - P'(\alpha) = \frac{\alpha^n}{n!}$, d'où $\alpha = 0$, mais $P(0) = 1$. Ainsi les racines de P sont simples.

Exercice 9.

Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants en facteurs irréductibles

$$X^3 + 1, \quad X^3 - 1, \quad X^4 + 1, \quad X^4 + X^2 + 1.$$

Solution :

1. $X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$ dans $\mathbb{R}[X]$
 $X^3 + 1 = (X + 1)(X - e^{\frac{i\pi}{3}})(X - e^{-\frac{i\pi}{3}})$ dans $\mathbb{C}[X]$
2. $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ dans $\mathbb{R}[X]$
 $X^3 - 1 = (X - 1)(X - e^{\frac{2i\pi}{3}})(X - e^{-\frac{2i\pi}{3}})$ dans $\mathbb{C}[X]$
3. $X^4 + 1 = X^4 - i^2 = (X^2 - i)(X^2 + i) = (X - e^{\frac{i\pi}{4}})(X + e^{\frac{i\pi}{4}})(X - e^{\frac{3i\pi}{4}})(X + e^{\frac{3i\pi}{4}})$ dans $\mathbb{C}[X]$.

On remarque que $\overline{e^{\frac{i\pi}{4}}} = e^{-\frac{i\pi}{4}} = -e^{\frac{3i\pi}{4}}$ et $\overline{e^{\frac{3i\pi}{4}}} = -e^{\frac{i\pi}{4}}$,

alors, $(X - e^{\frac{i\pi}{4}})(X + e^{\frac{3i\pi}{4}}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(e^{\frac{i\pi}{4}}) + |e^{\frac{i\pi}{4}}|^2 = X^2 - \sqrt{2}X + 1$ et

$(X - e^{\frac{3i\pi}{4}})(X + e^{\frac{i\pi}{4}}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(e^{\frac{3i\pi}{4}}) + |e^{\frac{3i\pi}{4}}|^2 = X^2 + \sqrt{2}X + 1$

On obtient alors la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$,

$$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1).$$

4. $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$ dans $\mathbb{R}[X]$
 $X^4 + X^2 + 1 = (X - e^{\frac{i\pi}{3}})(X - e^{-\frac{i\pi}{3}})(X - e^{\frac{2i\pi}{3}})(X - e^{-\frac{2i\pi}{3}})$ dans $\mathbb{C}[X]$

Exercice 10.

Soient $A(X) = (X - 1)^2$ et $B(X) = (X + 1)^2$.

1. Calculer le pgcd unitaire D de A et B .
2. Trouver deux polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $UA + VB = D$.
3. Dédire une décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(X^2 - 1)^2}$.

Solution :

1. Comme l'unique racine de A dans $\mathbb{C}$ est 1 et qui n'est pas racine de B , les polynômes A et B ne peuvent pas avoir de facteur irréductible commun, d'où $D = 1$. Calculer le pgcd unitaire D de A et B .
2. Appliquons l'algorithme d'Euclide. La division euclidienne de A par B donne $A = B - 4X$. La division euclidienne de B par le reste obtenu $-4X$ donne $B = (-\frac{1}{4}X - \frac{1}{2})(-4X) + 1$. Comme le reste trouvé ici est une constante non nulle, on retrouve que A et B sont premiers entre eux. Mais l'algorithme d'Euclide permet d'obtenir une identité de Bezout, en "remontant les divisions" :
 $1 = B - (-\frac{1}{4}X - \frac{1}{2})(-4X) = B - (-\frac{1}{4}X - \frac{1}{2})(A - B) = \frac{1}{4}(X + 2)A + \frac{1}{4}(-X + 2)B$
on trouve donc $U = \frac{1}{4}(X + 2)$ et $V = \frac{1}{4}(-X + 2)$.

$$3. \text{ On a } \frac{1}{(X^2-1)^2} = \frac{1}{A.B} = \frac{\frac{1}{4}(X+2)A + \frac{1}{4}(-X+2)B}{A.B} = \frac{\frac{1}{4}(X+2)}{B} + \frac{\frac{1}{4}(-X+2)}{A}.$$

$$\text{D'autre part } \frac{\frac{1}{4}(X+2)}{B} = \frac{\frac{1}{4}(X+1) + \frac{1}{4}}{(X+1)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{(X+1)} + \frac{\frac{1}{4}}{(X+1)^2} \text{ et}$$

$$\frac{\frac{1}{4}(-X+2)}{A} = \frac{-\frac{1}{4}(X-1) + \frac{1}{4}}{(X-1)^2} = \frac{\frac{-1}{4}}{(X-1)} + \frac{\frac{1}{4}}{(X-1)^2}$$

Ainsi

$$\frac{1}{(X^2-1)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{(X+1)} + \frac{\frac{1}{4}}{(X+1)^2} + \frac{\frac{-1}{4}}{(X-1)} + \frac{\frac{1}{4}}{(X-1)^2}$$

est une décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(X^2-1)^2}$.

Exercice 11.

Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que, si $P(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, alors il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

Indication : On pourra montrer que, si $A, B, C, D \in \mathbb{R}[X]$, alors $(A^2 + B^2)(C^2 + D^2)$ est encore une somme de deux carrés dans $\mathbb{R}[X]$.

Décomposer $X^4 + X^2 + 1$ en une somme de deux carrés dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution :

- 1) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que, pour chaque x , $P(x)$ est positif. Les racines de P sont donc de multiplicité paire, et P se factorise :

$$P(X) = a^2 \prod (X - a_i)^2 \prod ((X - b_i)^2 + c_i^2)$$

En passant par $\mathbb{C}[X]$, on écrit $(A^2 + B^2) = (A + iB)(A - iB)$ et $(C^2 + D^2) = (C + iD)(C - iD)$,

alors

$$(A^2+B^2)(C^2+D^2) = (A+iB)(A-iB)(C+iD)(C-iD) = ((A+iB)(C+iD))((A-iB)(C-iD)) \\ = ((AC - BD) + i(AD + BC))((AC - BD) - i(AD + BC)) = (AC-BD)^2 + (AD+BC)^2.$$

Ainsi, le produit de somme de carrés est une somme de carrés.

En écrivant $(X - a_i)^2 = (X - a_i)^2 + 0^2$, on obtient par récurrence que P s'écrit $P = A^2 + B^2$.

Tout polynôme positif de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit donc comme somme de carrés de polynômes.

- 2) On a $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$.

Exercice 12. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$, $\frac{1}{X^n - 1}$.

Solution :

1. Les racines complexes de $P = X^n - 1$ sont les racines n -ième de l'unité, donc les complexes $\omega_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}}$, $k \in [[0, n-1]]$, d'où $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{\frac{2i\pi k}{n}})$.

2. La décomposition de $\frac{1}{X^n - 1}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$, est alors

$$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - e^{\frac{2i\pi k}{n}}}$$

$$\text{avec } a_k = \lim_{x \rightarrow e^{\frac{2i\pi k}{n}}} \frac{X - e^{\frac{2i\pi k}{n}}}{X^n - 1} = \lim_{x \rightarrow e^{\frac{2i\pi k}{n}}} \frac{1}{\frac{X^n - 1}{X - e^{\frac{2i\pi k}{n}}}} = \frac{1}{nX^{n-1}} \Big|_{X=e^{\frac{2i\pi k}{n}}} = \frac{e^{\frac{2i\pi k}{n}}}{n}.$$