
M2 MEEF : TD3

Exercice 1

Donner la nature du point $(0, 0)$ pour chacune des courbes paramétrées suivantes :

1. $\varphi(t) = (t^2, t^2 + t^3)$;
2. $\varphi(t) = (-t^3 + t^4, t^3)$;
3. $\varphi(t) = (3(\sin t - t), t^3 + t^5)$;
4. $\varphi(t) = (3(\cos t - 1), t^2 + t^4 + t^5)$.

Exercice 2

Soit $C = \varphi(\mathbb{R})$ la courbe où $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est définie par

$$\varphi(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, t \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)$$

Montrer que le point $(0, 0)$ est l'unique point double de C .

Exercice 3

Étudier la nature des points stationnaires de la courbe paramétrée définie par :

$$F(t) = (\cos(t), \sin(t)(1 + \cos(t))), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Soit $\mathcal{E} = \varphi([0, 2\pi])$ une ellipse définie par $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ où

$$\varphi(t) = (a \cos t, b \sin t).$$

Déterminer la tangente en chacun des points de $\mathcal{E}$.

Exercice 5

On considère l'ellipse $\mathcal{E}$ paramétrée par

$$F : t \mapsto (2 \cos(t), \sin(t)).$$

Déterminer l'ensemble des centres des cercles passant par O et tangents à $\mathcal{E}$.

Exercice 6

On considère la fonction $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h : t \mapsto t^{3/2}$. Calculer la longueur de la courbe représentative de h .

Exercice 7

Calculer la longueur de chacun des arcs de courbes suivant :

- 1) Une arche de cycloïde de paramétrage $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$.

2) La cardioïde d'équation polaire $\rho = a(1 + \cos \theta)$ avec $a > 0$ et $0 \leq \rho \leq a$

Exercice 8

oit $\mathcal{A} = \varphi([0, 2\pi])$ l'astroïde où $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est définie par

$$\varphi(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

- i) Déterminer l'ensemble des points stationnaires de cette courbe paramétrée
- ii) Déterminer la longueur de $\mathcal{A}$.

Réponse : On calcule

$$\forall t \in [0, 2\pi], \varphi'(t) = (-3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t)).$$

Déterminons l'ensemble des points singuliers de cette courbe paramétrée :

$$\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos^2(t)\sin(t) = \sin^2(t)\cos(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = 0 \text{ ou } \sin(t) = 0,$$

si et seulement si $t = \frac{\pi}{2} [\frac{\pi}{2}]$, c'est-à-dire si $t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$. Par symétrie, de $\cos$ (qui est pair) et $\sin$ (qui est impair), la longueur totale de la courbe est la somme des longueurs des 4 portions de courbes $\varphi([0, \pi/2])$, $\varphi([\pi/2, \pi])$, $\varphi([\pi, 3\pi/2])$ et $\varphi([3\pi/2, 2\pi])$ où la courbe paramétrée est régulière. Ainsi, la longueur de la courbe est

$$\begin{aligned} \ell(A) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\varphi'(t)\| dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{\cos^4(t)\sin^2(t) + \sin^4(t)\cos^2(t)} dt \\ &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(t)\cos(t)| \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} dt \\ &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t) dt = 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) dt = 6 \left[-\frac{\cos(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6. \end{aligned}$$

Exercice 9

On considère la fonction $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $F(t) = (t, t^2)$. Calculer la longueur de la courbe représentative de F .

Réponse : En utilisant le changement de variable $2t = \operatorname{sh}(u)$, on obtient que la longueur est $L = \frac{1}{4}((2 + \sqrt{5})^2 + \ln(2 + \sqrt{5}))$

Exercice 10

On considère la courbe paramétrée définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{-1\}$ par

$$f : t \mapsto \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$$

1. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. Comparer les points $M(\frac{1}{t})$ et $M(t)$. Sur quel intervalle peut-on réduire l'étude de f ?
2. Tracer la courbe paramétrée.
3. Montrer qu'une équation cartésienne de la courbe est $x^3 + y^3 = 3xy$.

Réponse :

1. On a $M(\frac{1}{t}) = (\frac{3t^3}{t(t^3+1)}, \frac{3t^3}{t^2(t^3+1)}) = (\frac{3t^2}{1+t^3}, \frac{3t}{1+t^3})$, c'est le symétrique de $M(t)$ par rapport à la droite $y = x$. Par l'application $t \mapsto \frac{1}{t}$, l'intervalle $] -1, 0[$ est envoyé sur $] -\infty, -1[$ et $]0, 1[$ est envoyé sur $]1, +\infty[$. Il suffit donc de faire l'étude sur $] -1, 1[$ et la courbe complète est obtenue par symétrie par rapport à la première bissectrice.

2. On étudie $t \mapsto f(t) = M(t) = (\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3})$ sur $] -1, 1]$.

Les fonctions x et y sont de classe C^∞ et

$$x'(t) = 3 \frac{(1+t^3) - t(3t^2)}{(1+t^3)^2} = 3 \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$$

$$y'(t) = 3 \frac{2t(1+t^3) - t^2(3t^2)}{(1+t^3)^2} = 3t \frac{2t-t^3}{(1+t^3)^2}.$$

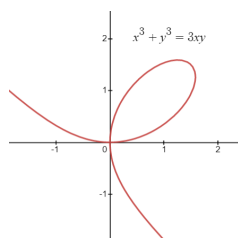
D'où le tableau de variations :

t	-1	0	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	1		
x'		$+$	$+$	0	$-$	
x	$-\infty$		0	$\sqrt[3]{4}$	$\frac{3}{2}$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		0	$\sqrt[3]{2}$	$\frac{3}{2}$	

Points stationnaires : Comme x' et y' ne s'annulent pas simultanément, il n'y a pas de point stationnaire.

Il y a une tangente horizontale dès que y' (resp. x') s'annule. On a une tangente horizontale en $M(0)$ et $M(\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ et une tangente verticale en $M(\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$.

Branches infinies : On a une branche infinie en lorsque t tend vers -1 . Or $y(t)/x(t) = t^2/t = t$ tend vers -1 et $y(t) + x(t) = 3t \frac{t+1}{t^3+1} = \frac{3t}{t^2-t+1}$ tends vers -1 . Donc la droite $y = -x - 1$ est asymptote lorsque t tend vers -1 .



3. Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors $x = y = 0$. On suppose dans la suite de la question que x et y sont non nuls. En posant $t = \frac{y}{x}$, alors $x = \frac{3\frac{y}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^3} \iff x = \frac{3x^3y}{x(x^3 + y^3)} \iff x^3 + y^3 = 3xy$.

Exercice 11

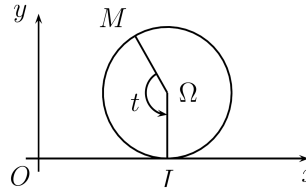
1) L'astroïde.

(a) a est un réel strictement positif donné. Etudier et construire la courbe de paramétrisation : $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$.

(b) Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on note $A(t)$ et $B(t)$ les points d'intersection de la tangente au point courant $M(t)$ avec respectivement (Ox) et (Oy) . Calculer la longueur $A(t)B(t)$.

2) La cycloïde.

(a) Un cercle $(\mathcal{C})$, de rayon $R > 0$, roule sans glisser sur l'axe (Ox) . On note I le point de contact entre $(\mathcal{C})$ et (Ox) et on note Ω le centre de $(\mathcal{C})$ (Ω et I sont mobiles). M est un point donné de $(\mathcal{C})$ ($\mathcal{C}$ est mobile, mais solide de $(\mathcal{C})$). On pose $t = (\widehat{\Omega M, \Omega I})$.



Déterminer une paramétrisation de la courbe décrite par le point M (on prendra t pour paramètre).

(b) Etudier et construire l'arc paramétré : $\begin{cases} x = R(t - \sin(t)) \\ y = R(1 - \cos(t)) \end{cases}$

où R est un réel strictement positif donné.

Réponse :

1. L'astroïde.

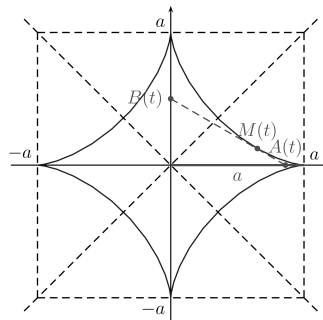
(a) La courbe $M(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ est 2π périodique, par suite, la courbe complète est obtenue quand t décrit un segment de longueur 2π , par exemple $[-\pi, \pi]$.

Etude des points stationnaires : Pour $t \in \mathbb{R}$, $M'(t) = \begin{pmatrix} -3a \cos^2 t \sin t \\ 3a \sin^2 t \cos t \end{pmatrix} = 3a \cos t \sin t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

Pour tout réel t , le vecteur $\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ est unitaire et n'est donc pas nul. Par suite,

$$M'(t) = \vec{0} \Leftrightarrow 3a \cos t \sin t = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \text{ ou } \sin t = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}.$$

Les points correspondants sont $(a, 0)$, $(0, a)$, $(-a, 0)$ et $(0, -a)$. Ces quatre points sont des points de rebroussement de première espèce. Il en résulte aussi que pour tout réel t , la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $(\cos t, \sin t)$. On en déduit la courbe.



(b) Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On a vu que la tangente (T) en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $(\cos t, \sin t)$. Une équation cartésienne de T_t est donc : $-\sin t(x - a \cos^3 t) - \cos t(y - a \sin^3 t) = 0$, ou encore (T_t) : $x \sin t + y \cos t = a \sin t \cos t$.

On en déduit immédiatement que $A(t)$ a pour coordonnées $(a \cos t, 0)$ et que $B(t)$ a pour coordonnées $(0, a \sin t)$ puis que $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $A(t)B(t) = a$.

2. La cycloïde.

(a) La condition de roulement sans glissement se traduit par $\overline{OI} = MI$

ou encore $x_\Omega = Rt$. On en déduit que

$$x_M = x_\Omega + x_{\Omega M} = Rt + R \cos(2\pi - \frac{\pi}{2} - t) = Rt - R \sin t = R(t - \sin t)$$

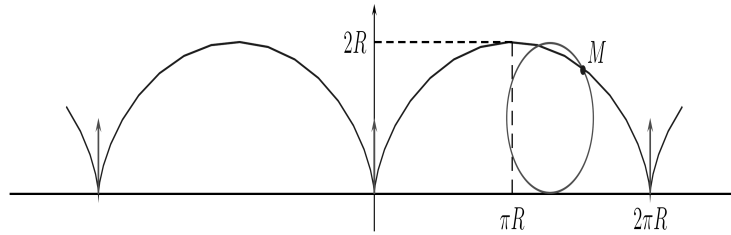
et

$$y_M = y_\Omega + y_{\Omega\bar{M}} = R + R \sin(2\pi - \frac{\pi}{2} - t) = R - R \cos t = R(1 - \cos t).$$

(b) Pour tout réel t , $M(t + 2\pi) = M(t) + \vec{u}$ où $\vec{u} = (2\pi R, 0)$. Par suite, on trace la courbe quand t décrit $[0, 2\pi]$ et la courbe complète est obtenue par translations de vecteurs $k\vec{u}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Etude des points stationnaires. Pour $t \in [0, \pi]$, $x'(t) = R(1 - \cos t) = 2R \sin^2(\frac{t}{2})$ et $y'(t) = R \sin t = 2R \sin(\frac{t}{2}) \cos(\frac{t}{2})$. Le point $M(t)$ est régulier si et seulement si $t \in]0, 2\pi[$.

Dans ce cas, la tangente en $M(t)$ est dirigée par $\begin{pmatrix} 2R \sin^2(t/2) \\ 2R \sin(t/2) \cos(t/2) \end{pmatrix}$ ou encore par $\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$. Les points stationnaires $M(0)$ et $M(2\pi)$ sont des points de rebroussement de première espèce.



Exercice 12

On considère la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = 3t^2 - 1 \\ y(t) = 3t^3 - t \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R}$.

- Déterminer le point double de la courbe.
- Calculer la longueur de la boucle de la courbe.

Réponse

1. Soient $t \neq s$ tels que $(x(t), y(t)) = (x(s), y(s))$, i.e. $\begin{cases} 3t^2 - 1 = 3s^2 - 1 \\ 3t^3 - t = 3s^3 - s \end{cases}$ Alors $t^2 = s^2$, donc $s = -t$, par suite $t \neq 0$ et $3t^3 - t = -3t^3 + t \iff 3t^3 = t \iff t^2 = \frac{1}{3}$. Ainsi, l'unique point double est $M(\frac{1}{\sqrt{3}}) = M(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = (0, 0)$.

2. La longueur L de la boucle de la courbe est la longueur entre $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

comme $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$, on aura

$$L = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{(6t)^2 + (9t^2 - 1)^2} dt \quad (1)$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{81t^4 + 18t^2 + 1} dt \quad (2)$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} |9t^2 + 1| dt \quad (3)$$

$$= \left[3t^3 + t \right]_{t=-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{t=\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{6}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}. \quad (4)$$