
M2 MEEF : TD1

Exercice 1

Déterminer un équivalent le plus simple possible de chacune des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

1) $\arccos \frac{1}{n}$

2) $\operatorname{ch}(\sqrt{n})$

3) $(1 + \frac{1}{n})^n$

4) $\ln(\cos \frac{1}{n}) \ln(\sin \frac{1}{n})$

5) $\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$

6) $\arccos \frac{n-1}{n}$

Exercice 2

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

1) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 et que ce prolongement est de classe C^1 .

2) Calculer le DL de f à l'ordre 3 en 0.

En admettant que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, calculer les dérivées successives de f en 0 jusqu'à l'ordre 3.

Exercice 3

1) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $x = \ln x + n$ admet une seule solution dans l'intervalle $]0; 1[$. On note x_n cette solution

2) Étudier la suite $(x_n)_{n \geq 2}$.

3) Démontrer que $x_n \sim_{+\infty} e^{-n}$.

4) Déterminer un équivalent simple de $x_n - e^{-n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(t) = x_0 + \alpha_0 t$, où $x_0, \alpha_0 \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose que $f(t) = o(t)$ quand $t \rightarrow 0$. Que peut-on dire de x_0 et α_0 ?

3. Décrire l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient $f(t) = o(t)$ et $f(0) = 0$, en termes de continuité et dérivabilité.

Exercice 5

La fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto |t|^3 + t^{10}$ admet un développement limité en 0

1. à l'ordre 2 : $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + o(t^2)$. Vrai ou faux ?
2. à l'ordre 3 : $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + o(t^3)$. Vrai ou faux ?

Exercice 6

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si
 $f(0) = 0$?
 $f'(0) = 0$?
 $f(0) = f'(0) = 0$?
2. g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si
 $f(0) = 0$?
 $f'(0) = 0$?
 $f(0) = f'(0) = 0$?

Exercice 7

On considère la fonction définie sur $I =]-1, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(1+x)$.

- 1) Montrer que f est indéfiniment dérivable.
Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f .
- 2) Montrer que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective.
- 3) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f^{-1} .

Exercice 8

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toutes les fonctions mentionnées f, g, h sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit λ un réel non nul. $f = o(g)$ en $t_0 \Rightarrow f = o(\lambda g)$ et $\lambda f = o(g)$ en t_0 .
2. $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$ en $t_0 \Rightarrow f_1 + f_2 = o(g_1 + g_2)$ en t_0 .
3. $f = o(g)$ et $g = o(h)$ en $t_0 \Rightarrow f = o(h)$ en t_0 .
4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $\lim_{t \rightarrow t_1} \varphi(t) = t_0$. $f = o(g)$ en $t_0 \Rightarrow f \circ \varphi = o(g \circ \varphi)$ en t_1 .
5. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. $f = o(g)$ en $t_0 \Rightarrow \varphi \circ f = o(\varphi \circ g)$ en t_0 .

Mêmes questions pour $\mathcal{O}$ à la place de o .