
M2 MEEF : Corrigé du TD1

Exercice 1

Déterminer un équivalent le plus simple possible de chacune des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

1. $\arccos \frac{1}{n}$
2. $\operatorname{ch}(\sqrt{n})$
3. $(1 + \frac{1}{n})^n$
4. $\ln(\cos \frac{1}{n}) \ln(\sin \frac{1}{n})$
5. $\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$
6. $\arccos \frac{n-1}{n}$

Exercice 2

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 et que ce prolongement est de classe C^1 .
2. Calculer le DL de f à l'ordre 3 en 0.
En admettant que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, calculer les dérivées successives de f en 0 jusqu'à l'ordre 3.

Exercice 3

1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $x = \ln x + n$ admet une seule solution dans l'intervalle $]0; 1[$. On note x_n cette solution
2. Étudier la suite $(x_n)_{n \geq 2}$.
3. Démontrer que $x_n \sim_{+\infty} e^{-n}$.
4. Déterminer un équivalent simple de $x_n - e^{-n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Réponse :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, on définit $g_n :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ par $g_n(x) = x - \ln x - n$. Alors $g'_n(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} < 0$ sur $]0, 1[$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} g_n(x) = 1 - n < 0$; comme g_n est strictement monotone et change de signe sur $]0, 1[$, l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1[$. On remarque que $x_n = \ln(x_n) + n$.
2. Étudier la suite $(x_n)_{n \geq 2}$.
On a $x_{n+1} - x_n = \ln(x_{n+1}) + n + 1 - \ln(x_n) - n = \ln(x_{n+1}) - \ln(x_n) + 1$. Comme $x_{n+1} - x_n < 1$, on aura nécessairement $\ln(x_{n+1}) - \ln(x_n) < 0$, comme la fonction logarithme est croissante, on déduit que $x_{n+1} < x_n$. La suite est décroissante (strictement) et minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \in [0; 1]$.
Supposons que $\ell > 0$. Comme $n = x_n - \ln(x_n)$, en passant à la limite on obtient, $\ell - \ln(\ell) = +\infty$ ce qui est absurde. On en déduit que $\ell = 0$.

3. Démontrer que $x_n \sim e^{-n}$.

On a $x_n = \ln(x_n) + n \iff e^{x_n} = x_n e^n$, comme $\lim_n x_n = 0$, $\lim_n e^{x_n} = 1$, ainsi $x_n e^n \sim 1$, d'où $x_n \sim e^{-n}$.

4. Déterminer un équivalent simple de $x_n - e^{-n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Comme $\lim_n x_n = 0$, le DL à l'ordre 1 en 0 la fonction $x \mapsto e^x$, donne $e^{x_n} \sim 1 + x_n$ alors $1 + x_n \sim x_n e^n$ d'où $x_n e^n - 1 \sim x_n$, par transitivité et 2., on aura $x_n e^n - 1 \sim e^{-n}$ et finalement, $x_n - e^{-n} \sim e^{-2n}$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(t) = x_0 + \alpha_0 t$, où $x_0, \alpha_0 \in \mathbb{R}$.

- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- On suppose que $f(t) = o(t)$ quand $t \rightarrow 0$. Que peut-on dire de x_0 et α_0 ?
- Décrire l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient $f(t) = o(t)$ et $f(0) = 0$, en termes de continuité et dérivabilité.

Réponse :

1. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$. Pour avoir $|f(t) - f(t_0)| = |\alpha_0||t - t_0| < \epsilon$, il suffit alors de

$$\text{prendre } \delta = \begin{cases} \frac{\epsilon}{|\alpha_0|} & \text{si } \alpha_0 \neq 0 \\ 1 & \text{si } \alpha_0 = 0 \end{cases}.$$

On a donc montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, vérifiant $|t - t_0| < \delta$ on a $|f(t) - f(t_0)| < \epsilon$, c'est à dire que f est continue en t_0 , comme $t_0 \in \mathbb{R}$ est arbitraire, f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. On a $f(t) = o(t)$ quand $t \rightarrow 0$ c-a-d qu'il existe une fonction $\epsilon(t)$ définie sur I , où I est un intervalle centré en 0 et telle que pour tout $t \in I \setminus \{0\}$ on a $f(t) = t\epsilon(t)$ et $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \epsilon(t) = 0$.

On a, $x_0 = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} f(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} t\epsilon(t) = 0$, d'où $x_0 = 0$. Par suite $f(t) = \alpha_0 t$ et par suite

$$\alpha_0 = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(t)}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \epsilon(t) = 0. \text{ Ainsi } x_0 = \alpha_0 = 0.$$

3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(t) = o(t)$ et $f(0) = 0$. Alors $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} f(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} t\epsilon(t) = 0 = f(0)$,

d'où f est continue en 0.

Maintenant pour $t \neq 0$, on a $\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{f(t)}{t} = \epsilon(t)$, d'où $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} =$

$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \epsilon(t) = 0$, on a montré que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

Réciproquement, si f est dérivable en 0 et $f(0) = f'(0) = 0$, le développement limité de f en 0 est $f(t) = f(0) + tf'(0) + o(t) = o(t)$.

On a donc montré que

$$\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } f = o(t) \text{ et } f(0) = 0\} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable en 0 et } f(0) = f'(0) = 0\}.$$

Exercice 5

La fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto |t|^3 + t^{10}$ admet un développement limité en 0

1. : $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + o(t^2)$. Vrai ou faux ?

Réponse : Puisque $f(t) = |t|^3 + t^{10}$ est un $o(t^2)$ lorsque t tend vers 0, alors $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + o(t^2)$, avec $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, ainsi, f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 dont la partie principale est $P = 0$.

La proposition est vraie.

2. à l'ordre 3 : $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + o(t^2)$. Vrai ou faux ?

Réponse : On vérifie facilement que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ ainsi, si f admet un développement limité à l'ordre 3 en 0, alors il sera de la forme $f(t) = a_3t^3 + o(t^3)$,

par suite $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t^3} = a_3$ existe. Mais, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t|^3 + t^{10}}{t^3} = 1$ et

$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t)}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{|t|^3 + t^{10}}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-t^3 + t^{10}}{t^3} = -1$ donc la limite n'existe pas. Ainsi, f n'admet pas un développement limité à l'ordre 3 en 0.

La proposition est fausse.

Exercice 6

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

— g est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

☐ $f(0) = 0$

☐ $f'(0) = 0$

☒ $f(0) = f'(0) = 0$

— g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

☐ $f(0) = 0$

☐ $f'(0) = 0$

☒ $f(0) = f'(0) = 0$

Exercice 7

On considère la fonction définie sur $I =]-1, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(1+x)$.

1. Montrer que f est indéfiniment dérivable.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f .

2. Montrer que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective.

3. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f^{-1} .

Réponse :

1. La fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(1+x)$ est de classe C^∞ , de dérivée $g'(x) = \frac{1}{1+x}$. Alors, f est de classe C^∞ sur I , comme somme de fonctions de classe C^∞ , à savoir g et l'identité.

La fonction f est de classe C^∞ sur I , et $0 \in I$, alors elle admet un développement limité en 0 à l'ordre $k \in \mathbb{N}$, en particulier pour $k = 3$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3).$$

On a $f(0) = 0$, $f'(0) = 1 + \frac{1}{1+0} = 2$, $f''(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1$, $f'''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2$, ainsi

$$f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

2. Pour tout $x \in I =]-1, +\infty[$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x} = \frac{2+x}{1+x} > 0$, elle est donc monotone sur l'intervalle I , elle est donc injective ; de plus $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, par le théorème des valeurs intermédiaires, $f(I) = \mathbb{R}$, ainsi f est surjective. Donc $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ réalise une bijection de I sur $\mathbb{R}$. On notera par $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow I$ sa fonction réciproque.

3. Comme pour tout $x \in I$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x} \neq 0$, f^{-1} est aussi de classe C^∞ .

En écrivant les développements limités en 0 à l'ordre 3 :

$$\begin{cases} f(x) = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ f^{-1}(y) = ay + by^2 + cy^3 + o(y^3) \end{cases}$$

on a :

$$x = f^{-1}(f(x)) = a(2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) + b(2x - \frac{x^2}{2})^2 + c(2x)^3 + o(x^3)$$

$$= 2ax + (4b - \frac{a}{2})x^2 + (\frac{a}{3} - 2b + 8c)x^3 + o(x^3)$$

et par unicité du développement limité à l'ordre 3 en 0, on déduit que :

$$2a = 1, 4b - \frac{a}{2} = 0, \frac{a}{3} - 2b + 8c = 0 \implies a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{16} \text{ et } c = -\frac{1}{192}$$

$$\text{ce qui donne } f^{-1}(y) = \frac{y}{2} + \frac{y^2}{16} - \frac{y^3}{192} + o(y^3) .$$

Exercice 8

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toutes les fonctions mentionnées f, g, h sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit λ un réel non nul. $f = o(g)$ en $t_0 \Rightarrow f = o(\lambda g)$ et $\lambda f = o(g)$ en t_0 .
2. $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$ en $t_0 \Rightarrow f_1 + f_2 = o(g_1 + g_2)$ en t_0 .
3. $f = o(g)$ et $g = o(h)$ en $t_0 \Rightarrow f = o(h)$ en t_0 .
4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $\lim_{t \rightarrow t_1} \varphi(t) = t_0$. $f = o(g)$ en $t_0 \Rightarrow f \circ \varphi = o(g \circ \varphi)$ en t_1 .
5. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. $f = o(g)$ en $t_0 \Rightarrow \varphi \circ f = o(\varphi \circ g)$ en t_0 .

Mêmes questions pour $\mathcal{O}$ à la place de o .

Réponse :

1. L'assertion est vraie.

En effet, on a $f(t) = g(t)\epsilon(t)$ et $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \epsilon(t) = 0$. Comme $\lambda \neq 0$, On aura alors $f(t) = \lambda g(t)\epsilon_1(t)$, avec $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{\lambda}$ et $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \epsilon_1(t) = 0$, on a donc montré que $f = o(g)$ en t_0 .

De même on a $\lambda f(t) = \lambda g(t)\epsilon_2(t)$, avec $\epsilon_2 = \lambda \epsilon$ et $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \epsilon_2(t) = 0$, d'où $\lambda f = o(g)$ en t_0 .

2. L'assertion est fausse. Contre-exemple : $f_1(t) = f_2(t) = t$, $g_1(t) = 1$, $g_2(t) = -1$ et $t_0 = 0$. Alors $f_1(t) + f_2(t) = 2t$ n'est pas un petit o de $g_1 + g_2 = 0$ en $t = 0$.

3. L'assertion est vraie. On a par hypothèse $f(t) = g(t)\epsilon_1(t)$ avec $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \epsilon_1(t) = 0$ et $g(t) = h(t)\epsilon_2(t)$ et $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \epsilon_2(t) = 0$.

Alors $f(t) = h(t)\epsilon(t)$ avec $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \epsilon(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \epsilon_1(t)\epsilon_2(t) = 0$. D'où $f = o(h)$ en t_0 .

4. L'assertion est vraie. En effet, on a $f(t) = g(t)\epsilon(t)$ avec $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \epsilon(t) = 0$. Alors $f \circ \varphi = g \circ \varphi \cdot \epsilon_1$ avec $\epsilon_1 = \epsilon \circ \varphi$. Comme $\lim_{\substack{t \rightarrow t_1 \\ t \neq t_1}} \epsilon_1 = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \epsilon(t) = 0$, on a bien $f \circ \varphi = o(g \circ \varphi)$ en t_1 .
5. L'assertion est fausse. Contre-exemple : $f(t) = t^2$ et $g(t) = t$, $\varphi(t) = e^t$ et $t_0 = 0$. Comme $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$, on a bien $f = o(g)$ en 0, mais $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{\varphi(f(t))}{\varphi(g(t))} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{e^{t^2}}{e^t} = 1$, d'où $\varphi \circ f$ n'est pas un petit o de $\varphi \circ g$ en $t = 0$.

En utilisant la définition de $\mathcal{O}$, on trouve les mêmes réponses : les assertions 2. et 5. sont fausses, les autres sont vraies.