Analyse-Probabilité

Corrigé du contrôle du 12 février 2025

Exercice 1

Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient A, B et C trois événements.
À quelles conditions sont-ils mutuellement indépendants ?
Réponse : Pour que ces évènements soient mutuellement indépendants il faut que : $\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B), \mathrm{P}(A\cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C), \mathrm{P}(C\cap B) = \mathrm{P}(\mathrm{C})\mathrm{P}(\mathrm{B})$ et $\mathrm{P}(A\cap B\cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

Exercice 2

Soit $a\in\mathbb{R}$ et soient f et g deux fonctions réelles définies sur $V\setminus\{a\}$, où V est un voisinage de a. Démontrer la propriété :

$$\text{"}f\sim g\text{, lorsque } x \text{ tend vers } a\text{ "} \implies \text{"si } f \text{ admet une limite en } a\text{, alors } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)\text{".}$$

Qu'en est-il de la réciproque ?

Réponse : Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$, alors il existe une suite (φ_n) telle que : $u_n = v_n\varphi_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_n = 1$. On en déduit que si (v_n) admet une limite, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Par ailleurs, la réciproque est fausse : $u_n = \sin(1/n)$ et $v_n = \arctan(1/n^2)$ tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, mais ne sont pas équivalents : u_n est équivalent à $\frac{1}{n}$, v_n est équivalent à $\frac{1}{n^2}$ qui est négligeable par rapport à $\frac{1}{n}$.

Exercice 3

i) Soit a un réel >0. Justifier que : $a^{1/n} = 1 + \dfrac{1}{n}\ln(a) + o(\dfrac{1}{n})$

Réponse : Pour tout entier naturel n non nul, on a : $a^{1/n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(a)}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\ln(a)$, on en déduit que : $a^{1/n} = 1 + \dfrac{1}{n}\ln(a) + o(\dfrac{1}{n})$.

ii) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n$

Réponse : Soit n un entier naturel non nul. on pose $u_n = 3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}$. Alors $(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n = \mathrm{e}^{n\ln(u_n)}$.
D'après la question précédente :

$$u_n = 3(1 + \frac{1}{n}\ln(2) + o(\frac{1}{n})) - 2(1 + \frac{1}{n})\ln(3) + o(\frac{1}{n}))$$
$$= 1 + \frac{1}{n}(3\ln(2) - 2\ln(3)) + o(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{n}\ln(\frac{8}{9}) + o(\frac{1}{n}).$$

On en déduit que : $\ln(u_n) = \ln(1 + \dfrac{1}{n}\ln(\dfrac{8}{9}) + o(\dfrac{1}{n})) = \ln(u_n) = \dfrac{1}{n}\ln(\dfrac{8}{9}) + o(\dfrac{1}{n})$ d'où $\ln(u_n) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}\ln(\dfrac{8}{9})$ et $n\ln(u_n) \sim_{+\infty} \ln(\dfrac{8}{9})$. En particulier : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(u_n) = \ln(\dfrac{8}{9})$, d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{n\ln(u_n)} = \mathrm{e}^{\ln(\frac{8}{9})}$, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n = \dfrac{8}{9}$.

Exercice 4

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*, X_n \hookrightarrow B(n,\ \frac{1}{n})$.

1) Déterminer $X_n(\Omega)$ ainsi que $P([X_n = k])$ pour tout $k\in X_n(\Omega)$.

2) Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$ fixé, $\dbinom{n}{k} \sim \dfrac{n^k}{k!}$, lorsque $n\to+\infty$.

3) En déduire que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} P([X_n = k]) = \dfrac{e^{-1}}{k!}$.

4) Interprétation.

Réponse :

Tournez la page S.V.P. →

1) $X_n(\Omega) = [[1, n]]$ et pour tout $k \in [[1, n]]$, $P([X_n = k]) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}$.

2) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^k}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$,
comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = 1$, on aura $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$, lorsque $n \to +\infty$.

3) D'après ce qui précède, lorsque $n \to +\infty$ on aura

$$P([X_n = k]) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} \sim \frac{n^k}{k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-k}$$

D'autre part, $\ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim n(-\frac{1}{n}) = -1$, par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-k} = 1^{-k}$, on aura finalement

$$\lim_{n\to+\infty} P([X_n = k]) = \frac{1}{k!} \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-k} = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

4) On a montré que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivant une loi binomiale $(B(n,\ \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (en loi de probabilité) vers une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$, $\mathcal{P}(1)$.

Exercice 5

Une personne souhaitant rentrer chez elle a un trousseau de n clés. On souhaite déterminer le nombre moyen d'essais nécessaires dans chacun des deux cas suivants :

1) La personne remet dans le trousseau après chaque essai la clé qui n'a pas convenu.
On considére la variable aléatoire X telle que : $[X = k]$: " le nombre d'essai qu'il a fallu faire pour trouver la bonne clé est k."
   i) Déterminer $X(\Omega)$ et montrer que X est une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$
   ii) Conclure.

2) La personne élimine après chaque essai la clé qui n'a pas convenu.
On considére la variable aléatoire Y telle que : $[Y = k]$: "la bonne clé est trouvée à l'essai numéro k."
   i) Déterminer $Y(\Omega)$ et montrer que Y est une loi uniforme de paramètre $\frac{1}{n}$.
   ii) Conclure.

Réponse : On note B la bonne clé et $M_1, \cdots, M_{n-1}$ les mauvaises clés.

1. On prend pour univers $\Omega = \{B, M_1, \cdots, M_{n-1}\}^{\mathbb{N}}$.
   i) Soit X la variable égale au rang d'apparition du premier succès. on a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $\mathbb{P}(X = k) = (1 - \frac{1}{n})^{k-1}\frac{1}{n}$. C'est une loi géométrique, de paramètre $\frac{1}{n}$.
   ii) Par conséquent le nombre moyen d'essais nécessaires est $E(X) = n$.
2. Soit Ω l'ensemble des permutations des éléments $B, M_1, \cdots, M_{n-1}$. On prend pour tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et pour probabilité $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme.
   i) Soit X la variable aléatoire qui à une permutation associe le rang d'apparition de B dans cette permutation. On a $X(\Omega) = [[1, n]]$ et pour tout $k \in [[1, n]]$,
   $\mathbb{P}(X = k) = \frac{Card(X=k)}{Card(\Omega)} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Ainsi $X \sim \mathcal{U}_{[[1,n]]}$.
   ii) Par conséquent le nombre moyen d'essais nécessaires est $E(X) = \frac{n+1}{2}$.