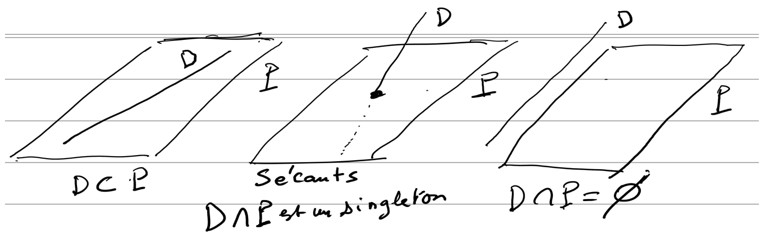
Algèbre-Géométrie

Corrigé du contrôle du 12 février 2025

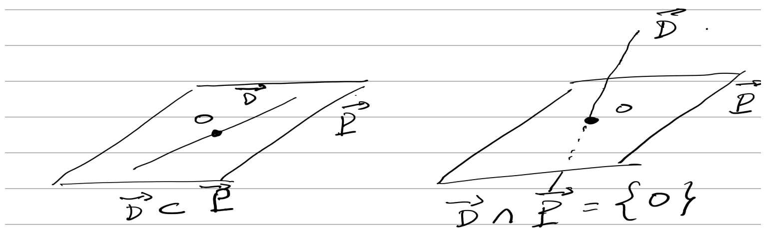
Exercice 1

On se place dans $\mathbb{R}^3$.

1) Soient $\mathcal{D}$ une droite affine et $\mathcal{P}$ un plan affine. Quelles sont les possibilités pour $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$. Donner un exemple pour illustrer chaque possibilité.



2) Soient $\vec{\mathcal{D}}$ une droite vectorielle et $\vec{\mathcal{P}}$ un plan vectoriel. Quelles sont les possibilités pour $\vec{\mathcal{D}} \cap \vec{\mathcal{P}}$. Donner un exemple pour illustrer chaque possibilité.



Exercice 2

Soient $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ deux entiers. On considère A une matrice à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et un vecteur B de $\mathbb{R}^m$. On considère la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = B\}$$

1) Dans quel cas S est-il vide ?
2) Si S n'est pas vide, montrer que S est un sous-espace affine de l'espace affine (canonique) $\mathbb{R}^n$. Déterminer sa direction et sa dimension.
3) Soit $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

   Montrer que F est un espace affine, donner sa dimension et déterminer une base de sa direction.

Réponse :

1) Si le vecteur B n'appartient pas à l'image de A, l'ensemble S est vide.
2) Supposons alors que B est un élément de l'image de A, par définition il existe X_0 une solution, c'est-à-dire $AX_0 = B$. Soit $X \in S$, alors $A(X - X_0) = B - B = 0$, donc $X - X_0 \in Ker(A)$ d'où $S \subset X_0 + \mathrm{Ker}A$. On vérifie aussi que $X_0 + \mathrm{Ker}A \subset S$. On a donc $S = X_0 + \mathrm{Ker}A$ ce qui montre que S est un sous espace affine de $\mathbb{R}^n$ dirigé par $\mathrm{Ker}A$ et de dimension $\dim \mathrm{Ker}(A) = \dim \mathbb{R}^n - rang A = n - rang A$.

   Remarque 0.1 *Si $n = m$ et A est inversible, alors $S = \{X_0\}$, sa direction est $\vec{S} = \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ de dimension 0.*

3) F est l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$ qui sont les points $(\frac{z}{5} + 2, \frac{3z}{5}, z)$ avec $z \in \mathbb{R}$.

   Alors $F = \{(\frac{z}{5} + 2, \frac{3z}{5}, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{(2, 0, 0) + z(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1)) \mid z \in \mathbb{R}\}$ est la droite affine qui passe par $A = (2, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ainsi $F = A + \vec{F}$ est un espace affine de dimension 1, où $\vec{F} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$, sa base est formée du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soit $\mathrm{G} = \{a + b\sqrt{2} | a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q}\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

i) Montrer que G est un groupe pour l'addition.

ii) Montrer que l'ensemble des éléments non nuls de G est un groupe pour la multiplication.

Réponse :

i) Montrons que G est un groupe pour l'addition. Il suffit de montrer que G est un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$. Or on a $(a + b\sqrt{2}) - (a' + b'\sqrt{2}) = (a - a') + (b - b')\sqrt{2}$.

ii) Montrons que l'ensemble des éléments non nuls de G est un groupe pour la multiplication. Il suffit de montrer que $\mathrm{G}\backslash\{0\}$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, .)$. Introduisons la quantité conjuguée $a' - b'\sqrt{2}$ de $a' + b'\sqrt{2}$. En multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée nous obtenons $\dfrac{a + b\sqrt{2}}{a + b'\sqrt{2}} = \dfrac{(a + b\sqrt{2})(a' + b'\sqrt{2})}{a^2 - 2b^2} = \dfrac{aa' - 2bb' + (ab' + a'b)\sqrt{2}}{a'^2 - 2b'^2}$. Ainsi $\mathrm{G}\backslash\{0\}$ est bien un sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, .)$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^n = 1\} = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \,|\, k \in \{0,\ \cdots,\ n-1\}\right\}$.

1. Montrer que $(\mathcal{U}_n, .)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\ .)$.
2. Montrer que si $n, m \in \mathbb{N}^*$ et n divise m alors $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_m$.
3. Montrer que si $d = PGCD(n, m)$ alors $\mathcal{U}_d = \mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}_m$.
4. On pose $n = 30$. Déterminer tous les sous-groupes de $\mathcal{U}_{30}$.

Réponse :

1. $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}, 1^n = 1$ donc $1 \in \mathcal{U}_n$, si $z_1 \in \mathcal{U}_n$ et $z_2 \in \mathcal{U}_n$ alors $(z_1 z_2^{-1})^n = (\dfrac{z_1}{z_2})^n = \dfrac{z_1^n}{z_2^n} = \dfrac{1}{1} = 1$ donc $z_1 z_2^{-1} \in \mathcal{U}_n$, par conséquent $(\mathcal{U}_n,\ .)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, .)$.
2. Par hypothèse il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = kn$. Soit $z \in \mathcal{U}_n$ arbitraire.
   On a $z^m = z^{kn} = (z^n)^k = 1^k = 1$, donc $z \in \mathcal{U}_m$ On a ainsi montré que $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_m$.
3. Si $d = PGCD(n, m)$ alors d divise n et m, d'après 2., $\mathcal{U}_d \subset \mathcal{U}_n$ et $\mathcal{U}_d \subset \mathcal{U}_m$, ainsi $\mathcal{U}_d \subset \mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}_m$.
   D'autre part, l'identité de Bézout donne l'existence de $(k, d) \in \mathbb{Z}^2$ telle que $d = kn + ld$. Soit $z \in \mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}_m$, alors $z^d = (z^n)^k (z^d)^l = 1^k 1^d = 1$, ceci montre que $\mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}_m \subset \mathcal{U}_d$. Finalement, on a $\mathcal{U}_d = \mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}_m$.
4. D'après le théorème de Lagrange, pour un groupe fini, l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe. Les diviseurs de $n = 30 = 2 \times 3 \times 5$ sont les éléments de $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.
   Ainsi les sous-groupes de $\mathcal{U}_d$ sont $\mathcal{U}_1 = \{1\}$, $\mathcal{U}_2 = \{1, -1\}$, $\mathcal{U}_3 = \{1, j, j^2\}$, $\mathcal{U}_5$, $\mathcal{U}_6$, $\mathcal{U}_{10}$, $\mathcal{U}_{15}$, et $\mathcal{U}_{30}$.