**Algèbre-Géométrie**

*Corrigé du contrôle du 14 février 2024*

---

**Exercice 1.** Si le vecteur $B$ n'appartient pas à l'image de $A$, l'ensemble $S$ est vide.
Supposons alors que $B$ dans l'image de $A$, par définition il existe $X_0$ une solution, c'est $AX_0 = B$.
Soit $X \in S$, alors $A(X - X_0) = B - B = 0$, d'où $S \subset X_0 + \mathrm{Ker}A$. On vérifie aussi que $X_0 + \mathrm{Ker}A \subset S$.
On donc

$$S = X_0 + \mathrm{Ker}A$$

ce qui montre que $S$ est un sous espace affine de $\mathbb{R}^n$ dirigé par $\mathrm{Ker}A$ de dimension $n - rangA$.

**Exercice 2.**

1) Les vecteurs $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, $\det \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$. Les points ne sont donc pas alignés. Pour obtenir une équation implicite (cartésienne) de $\mathcal{P}$, il suffit de dire : un point $M$ de coordonnées, $(x,\ y,\ z)$ appartient $\mathcal{P}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ et $\vec{AB}$ sont liés. Ceci équivaut à $\det \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ y-2 & -2 & -3 \\ z-1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$, c'est à dire $2x + y - z = 1$. D'autre part, l'unique plan affine passant par $A$, $B$ et $C$ s'écrit de manière paramétré :
$\mathcal{P} = A + Vect(\vec{AB}, \vec{AC}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

2) L'unique droite $\mathcal{D}$ passant par les points $D$ et $E$ s'écrit de manière paramétrée :

$$\mathcal{D} = D + Vect(\vec{DE}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour obtenir une équation implicite(cartésienne) on procède comme précédemment : un point $M$ de coordonnées $(x,\ y,\ z)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{DM}$ et $\vec{DE}$ sont colinéaires, autrement dit la matrice $\begin{pmatrix} x-1 & 2 \\ y-2 & 1 \\ z-3 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 1. Ceci se traduit par la nullité des trois déterminants $2 \times 2$ extraits de cette matrice, qui donne le système d'équations implicites définissant la droite $\mathcal{D}$ :
$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ x + 2z = 7 \\ y + z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 7 \\ y + z = 5 \end{cases}$ la première équation étant combinaison linéaire des autres.

3) Soit $M$ un point d'intersection. Le point $M$ appartient à la droite $\mathcal{D}$, donc il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Le point $M$ appartenant à $\mathcal{P}$, ses coordonnées vérifient l'équation implicite de $\mathcal{P}$ donc : $2\ (1 + 2\lambda) + (2 + \lambda) - (3 - \lambda) = 1$ ce qui donne $\lambda = 0$. Donc le point d'intersection $M$ est le point $D$.

**Exercice 3.**

1. En utilisant la notation du cours, $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ on a $\det A = -4 \neq 0$, et $\det H = 1 - \alpha^2$, d'où $\begin{cases} (\Gamma_\alpha) \text{ est une ellipse } \iff 1 - \alpha^2 > 0 \iff \alpha \in ]-1, 1[ \\ (\Gamma_\alpha) \text{ est une parabole } \iff 1 - \alpha^2 = 0 \iff \alpha \in \{-1, 1\} \\ (\Gamma_\alpha) \text{ est une hyperbole } \iff 1 - \alpha^2 < 0 \iff \alpha \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[ \end{cases}$

2. (a) $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ vers la base $(\vec{u}, \vec{v})$,
alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{pmatrix}$.

(b) L'équation de $(\Gamma_\alpha)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ s'obtient en exprimant $x, y$ en fonction de $X, Y$ d'où :

$$(1+\alpha)X^2 + (1-\alpha)Y^2 + 2\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}Y = 0.$$

(c) On obtient un cercle (cas particulier d'une ellipse) si $1 - |\alpha| > 0$ et d'après l'écriture en (b), lorsque $1 + \alpha = 1 - \alpha$, soit $\alpha = 0$. On a donc un seul cercle, il est d'équation dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ :

$$X^2 + Y^2 + 2\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}Y = 0 \iff (X + \sqrt{2})^2 + (Y - \sqrt{2})^2 - 4 = 0$$

donc de centre $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et de rayon 2.

**Remarque 0.1** *Dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $(\Gamma_0)$ *est d'équation* $x^2 + y^2 + 4x = 0 \iff (x-2)^2 + y^2 - 4 = 0$, *donc un cercle de centre* $(-2, 0)$ *et de rayon* $2$.

3. La matrice associée à la conique $(\Gamma'_\alpha)$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -\alpha^2 \end{pmatrix}$ et $\det A = \alpha^4 - \alpha^2 - 4$.

   Alors, $(\Gamma'_\alpha)$ est la réunion de deux droites $\iff \det A = 0 \iff \alpha^4 - \alpha^2 - 4 = 0 \iff \alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}$.