

Algèbre-Géométrie
Contrôle du 14 février 2024 de 15h à 16h

Le sujet comporte **3** exercices indépendants. Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Exercice 1

Soient $m \geq 1$ et $n \geq 1$ deux entiers. On considère A une matrice à m lignes et n colonnes à coefficients dans \mathbb{R} et un vecteur B de \mathbb{R}^m . On considère la partie de \mathbb{R}^n définie par

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = B\}$$

Dans quel cas S est-il vide ? dans le cas contraire montrer que S est un sous espace affine de l'espace affine canonique associé à \mathbb{R}^n . Quelle est sa direction et sa dimension ?

Exercice 2

On se place dans \mathbb{R}^3 . On considère les points

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés. On note \mathcal{P} le plan affine engendré par A, B et C . Donner une équation implicite puis un paramétrage de \mathcal{P} .
- 2) On note \mathcal{D} la droite engendrée par les points D et E . Donner un système d'équations puis un paramétrage de la droite \mathcal{D} .
- 3) Calculer les coordonnées du point d'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$.

Exercice 3

Soit \mathcal{E} un plan affine euclidien et (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé de \mathcal{E} . Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note (Γ_α) la conique d'équation

$$x^2 + y^2 + 2\alpha xy + 4x = 0.$$

1. Déterminer, suivant la valeur de α , la nature de la conique (Γ_α) .
2. On considère les vecteurs $\vec{u}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\vec{v}(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et le repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . On note X et Y les coordonnées dans ce repère.
 - (a) Donner les formules analytiques du changement de repère exprimant x, y en fonction de X, Y .
 - (b) Déterminer l'équation de la conique (Γ_α) dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .
 - (c) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de α , (Γ_α) est un cercle. Donner son centre et son rayon.
3. On considère la conique (Γ'_α) d'équation $x^2 + y^2 + 2\alpha xy + 4x - \alpha^2 = 0$. Pour quelle(s) valeur(s) de α , (Γ'_α) est la réunion de deux droites ?