3.4 Théorème de Rouché, application ouverte et principe du maximum.

3.4.1 Théorème de Rouché

Notation : Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $A \subset \Omega$. On note par $\sharp(Z(f) \cap A)$ le nombre de zéros de f contenu dans A (comptés avec leur multiplicité).

3.4.1 EXEMPLE. Pour $f(z) = z^5(z-1)$ on a par exemple :
$\sharp(Z(f) \cap D(0,1)) = 5$, $\sharp(Z(f) \cap D(1,1)) = 1$, $\sharp(Z(f) \cap D(2,1)) = 0$ et $\sharp(Z(f) \cap D(0,2)) = 6$.

3.4.2 THÉORÈME (THÉORÈME DE ROUCHÉ)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Soit D un disque tel que $\overline{D} \subset \Omega$ et pour tout $z \in C = \partial D$ on a

$$|f(z)| > |g(z)|.$$

Alors f et $f+g$ ont même nombre de zéros (comptés avec leur multiplicité) dans D i.e. $\sharp(Z(f) \cap D) = \sharp(Z(f+g) \cap D)$

Démonstration: On a besoin du lemme suivant

3.4.4 LEMME
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et D un disque tel que $\overline{D} \subset \Omega$ et pour tout $z \in C = \partial D$, $f(z) \neq 0$. Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sharp(Z(f) \cap D).$$

Démonstration: (du lemme) Comme $\overline{D}$ est un compact et $Z(f)$ est un sous-ensemble discret de Ω, $Z(f) \cap D = Z(f) \cap \overline{D}$ est alors un sous-ensemble fini. On peut donc écrire $Z(f) \cap D = \{a_1, \ldots, a_k\}$ et soit $m_1, \ldots, m_k$ leur multiplicité respective de ces zéros. Une application répétée de 3.3.5 nous donne l'existence d'une fonction holomorphe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle : $f(z) = \prod_{i=1}^{k}(z-a_i)^{m_i} g(z)$ et $g(a_i) \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq k$. (on remarquera que g ne s'annule pas sur $\overline{D}$, car f n'a pas d'autres zéros dans $\overline{D}$.) On obtient, en prenant la dérivation logarithmique de f :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{z-a_i} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Par suite

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{i=1}^{k} \int_C \frac{1}{2i\pi} \frac{m_i}{z-a_i}\, dz + \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz$$

$$= \sum_{i=1}^{k} m_i = \sharp(Z(f) \cap D)$$

Car, par la formule de Cauchy on $\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{m_i}{z-a_i} \, dz = 1$ et par le théorème de Cauchy $\int_C \frac{g'(z)}{g(z)} \, dz = 0$, car $\frac{g'}{g}$ est holomorphe dans un voisinage de $\overline{D}$. ∎

Retour à la démonstration du théorème de Rouché. Pour $t \in [0,1]$ on pose $f_t = f + tg$, alors $f_0 = f$ et $f_1 = f + g$. On pose $n_t = \sharp(Z(f_t) \cap D)$. On doit montrer que $n_0 = n_1$. La condition $|f(z)| > |g(z)|$ pour $z \in C$ entraîne que $f_t(z) \neq 0$ pour $z \in C$ et d'après le lemme $n_t = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_C \dfrac{f_t'(z)}{f_t(z)} \, dz$. Comme, l'application $C \times [0,1] \to \mathbb{C}$, $(z,t) \mapsto \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}$ est continue, C et $[0,1]$ sont compacts, le théorème sur les intégrales dépendant d'un paramètre entraîne la continuité de l'application $t \mapsto n_t = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f_t'(z)}{f_t(z)} \, dz$, donc sa constance puisqu'elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $[0,1]$ est connexe.

3.4.2 Le théorème de l'application ouverte

3.4.6 PROPOSITION

Soit $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ un fonction holomorphe et $D(a;r)$ un disque dont l'adhérence est contenue dans Ω. Soit $w_0 \in \mathbb{C}$ tel que l'équation $f(z) = w_0$ a exactement n racines dans $D(a;r)$ et aucune sur le cercle $C(a;r)$.

Si $\delta = dist(w_0, f(C(a;r)))$, alors pour tout $w \in D(w_0;\delta)$ l'équation $f(z) = w$ a exactement n racines dans le disque $D(a;r)$.

Démonstration: Soit $w \in D(w_0;\delta)$. On pose $f_1(z) = f(z) - w_0$ et $g(z) = w_0 - w$ alors, $|g(z)| = |w_0 - w| < \delta \leq |f_1(z)|$ sur $C(a;r)$. D'après le Théorème de Rouché l'équation $(f_1 + g)(z) = 0$ a autant de racines que $f_1(z) = 0$ dans $D(a;r)$ i.e. l'équation $f(z) = w$ a autant de racines que $f(z) = w_0$, donc exactement n.

3.4.8 DÉFINITION

Soit $f : X \to Y$ une application entre deux espaces topologiques.
On dit que f est une application ouverte si l'image d'un ouvert de X est un ouvert de Y.

3.4.9 THÉORÈME (THÉORÈME DE L'APPLICATION OUVERTE)

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et non constante. Alors l'image $f(\Omega)$ est un domaine de $\mathbb{C}$.

Démonstration: Soit $w_0 \in f(\Omega)$, il existe $a \in \Omega$ tel que $f(a) = w_0$.

Si on désigne par $\delta(a)$ la distance de a au complémentaire de Ω, alors $D(a;\delta(a)) \subset \Omega$ et f est holomorphe et non constante dans $D(a;\delta(a))$. Soit $R < \delta(a)$, l'équation $f(z) = w_0$ n'a qu'un nombre fini de racines dans le compact $\overline{D(a;R)}$, d'où il existe $r < R$ tel que $f(z) \neq w_0$ sur le cercle $C(a;r)$. Alors, si $|w_0 - w| < \delta = dist(w_0, f(C(a;r)))$ l'équation $f(z) = w$ a au moins une racine dans le disque $D(a;r)$ (car $f(a) = w_0$). Par conséquent le disque $D(w_0;\delta)$ est contenu dans $f(D(a;r))$ et donc dans $f(\Omega)$

3.4.11 COROLLAIRE
Toute application holomorphe est une application ouverte

3.4.12 EXEMPLE. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $f(\Omega)$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{C}$, alors f est constante.

Dans les exemples suivants f est nécessairement constante :

si $\mathrm{Re}(f)$ ou $\mathrm{Im}(f)$ est constante, $f(\Omega)$ est contenu dans une droite et donc n'est pas ouvert.

si $|f|$ est constante, alors $f(\Omega)$ est contenu dans un cercle et donc n'est pas un ouvert.

3.4.3 Le principe du maximum

3.4.13 THÉORÈME
Soit Ω un domaine et et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ non constante.

Alors $|f|$ ne peut pas atteindre son maximum dans Ω.

Démonstration: Supposons que $|f|$ atteigne son maximum en $a \in \Omega$ i.e. $|f(a)| = \max\limits_{z\in\Omega} |f(z)| > 0$. Comme f est holomorphe et non constante, c'est une application ouverte, d'où il existe $\delta > 0$ tel que le disque $D(f(a);\delta) \subset f(\Omega)$.

Soit $w = (1 + \dfrac{\delta}{2|f(a)|})f(a)$. Alors $w \in D(f(a);\delta)$ et par conséquent il existe $z \in \Omega$ tel que $w = f(z)$ et d'autre part, $|f(z)| = |w| > |f(a)|$, ce qui est absurde. ∎

3.4.15 COROLLAIRE
Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C^0(\Omega)$.

Alors, $\max\limits_{z\in\Omega} |f(z)| = \max\limits_{z\in\overline{\Omega}-\Omega} |f(z)|$

Démonstration: Comme $\overline{\Omega}$ est compact et $|f|$ est continue, il existe $a \in \overline{\Omega}$, tel que $|f(a)| = \max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)|$. D'après le principe du maximum $a \notin \Omega$, donc $a \in \overline{\Omega} - \Omega$.

3.4.17 REMARQUE

L'hypothèse $\overline{\Omega}$ compact est essentielle pour ce résultat. Par exemple si Ω est le premier cadrant ouvert et $f(z) = e^{-iz^2}$.

On a $|f(z)| = 1$ si $z \in \overline{\Omega} - \Omega$ mais $|f|$ n'est pas bornée ; en effet $|f(te^{\frac{i\pi}{4}})| = e^{t^2} \to +\infty$ si $t \to +\infty$.

3.4.18 COROLLAIRE (LEMME DE SCHWARZ)

Soit $f : D(0;1) \to D(0;1)$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$. Alors $|f(z)| \leq |z|$ pour $|z| \leq 1$.

Si de plus, pour un point z_0 de $D(0;1)$ on a $|f(z_0)| = |z_0|$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = e^{i\theta}.z$ pour tout $z \in D(0;1)$.

Démonstration: On pose

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0, \\ f'(0) & \text{si } z = 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Alors g est une fonction holomorphe dans $D(0;1)$.

Pour tout $0 < r < 1$ et $|z| = 1$ on a

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r} \tag{3.18}$$

■

D'après le principe du maximum $\max_{|z| \leq r} |g(z)| = \max_{|z|=r} |g(z)|$, par suite $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ pour tout $z \in D(0;r)$. Alors $|g(z)| \leq \lim_{r \to 1} \dfrac{1}{r} = 1$ pour tout $z \in D(0;1)$, c'est à dire que $|\frac{f(z)}{z}| \leq 1$ pour tout $z \in D(0;1)$.

Maintenant, si on suppose que pour z_0 dans $D(0;1)$ on a $|f(z_0)| = |z_0|$ alors $|g(z_0)| = 1$ et par suite $|g|$ atteint son maximum à l'ntérieur du domaine $D(0;1)$, d'après le principe du maximum g est constante i.e. il existe $c \in C(0;1)$ tel que $g(z) = c$ pour tout $z \in D(0;1)$, ce qui se traduit par, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = e^{i\theta}.z$ pour tout $z \in D(0;1)$.

3.4.4 Le théorème d'inversion locale

3.4.20 COROLLAIRE
Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et injective.

Alors pour tout $z \in \Omega$, $f'(z) \neq 0$.

Démonstration: Si $f'(z_0) = 0$ pour un certain $z_0 \in \Omega$, d'après la proposition 3.4.6, il existe des voisinages ouverts V de z_0 et W de $f(z_0)$ tels que pour tout $w \in W$, l'equation $f(z) = w$ a exactement m_0 racines, où m_0 est la multiplicité de la racine z_0. Comme $f'(z_0) = 0$, $m_0 > 1$ et par suite f n'est pas injective.

3.4.22 REMARQUE
la réciproque est en général fausse, i.e. dérivée non nulle n'entraîne pas l'injectivité.

Par exemple, l'application $f(z) = e^z$ vérifie $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, mais comme $f(0) = f(2i\pi)$ elle n'est pas injective.

3.4.23 DÉFINITION
Une application $f\colon U \to V$ est un **isomorphisme** (ou biholomorphe) si elle bijective, holomorphe et son inverse est holomorphe.

3.4.24 THÉORÈME (D'INVERSION LOCALE)
Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in \Omega$ tel que $f'(z_0) \neq 0$.

Alors, il existe un voisinage U de z_0 dans Ω et un voisinage V de $w_0 = f(z_0)$ dans $\mathbb{C}$ tels que la restriction de f à U soit un isomorphisme sur $V = f(U)$.

Démonstration: Comme $f'(z_0) \neq 0$ l'équation $f(z) = w_0$ a une racine simple en z_0, et , il existe $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tou $w \in D(w_0;\delta)$, l'équation $f(z) = w$ a exactement une racine dans le disque $D(z_0;\epsilon)$. Soit $V = D(w_0;\delta)$ et $U = f^{-1}(V) \cap D(z_0;\epsilon)$. Alors $f|_U : U \to V$ est injective, surjective et holomorphe. Il reste à montrer que $f^{-1} : V \to U$ est une fonction holomorphe. La fonction f^{-1} est continue. En effet, soit O un ouvert de U alors $(f^{-1})^{-1}(O) = f(O)$ qui est un ouvert de V car f est une application ouverte. Il reste à montrer que f^{-1} est dérivable. Soit $w_1 \in V$, il existe alors un unique $z_1 \in U$ tel que $f^{-1}(w_1) = z_1$ ($\Leftrightarrow f(z_1) = w_1$.) De la continuité de f^{-1} on a, $\lim\limits_{w \to w_1} \dfrac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_1)}{w - w_1} = \lim\limits_{z \to z_1} \dfrac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)}$ comme f est injective, $f'(z_1) \neq 0$ et par suite

$$\lim_{w \to w_1} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_1)}{w - w_1} = \lim_{z \to z_1} \frac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)} = \frac{1}{f'(z_1)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_1))}$$

d'où la dérivabilité de f^{-1}. ∎

3.5 Formule de Cauchy globale et applications

3.5.1 Indice d'un point par rapport à un lacet

Il existe une formule utile pour exprimer combien de fois une courbe fermée ou lacet γ tourne autour d'un point donné z_0. Ce nombre, est appelé **indice de γ par rapport au point z_0.**

La formule qu'on va utiliser pour calculer l'indice est basée sur le calcul qu'on a fait dans l'exemple 3.12 : Si γ est le cercle unité $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2i\pi \tag{3.19}$$

Si $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2n\pi$, alors γ tourne autour de l'origine n fois, et on trouve de la même façon

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = n \tag{3.20}$$

Notation : Si $\gamma : I \to \mathbb{C}$ est un chemin on notera par γ^* son image $\gamma(I)$.

3.5.1 Définition

Soit γ un lacet de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ un point qui n'est pas sur γ i.e. $z_0 \notin \gamma^*$.

On appelle indice de z_0 par rapport à γ le nombre

$$Ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{(z - z_0)}\, dz \tag{3.21}$$

3.5.2 Remarque

i) $Ind_\gamma(z_0)$ n'est pas défini si $z_0 \in \gamma^*$

ii) $Ind_{-\gamma}(z_0) = Ind_{-\gamma}(z_0) = -Ind_\gamma(z_0)$

iii) Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets de même origine et $z_0 \notin \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$ alors

$$Ind_{\gamma_1 \vee \gamma_2}(z_0) = Ind_{\gamma_1}(z_0) + Ind_{\gamma_2}(z_0).$$

3.5.3 Théorème (Théorème de l'indice)

Pour tout lacet $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, on a :

(i) Pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, $Ind_\gamma(z_0)$ est un entier.

(ii) la fonction $z \mapsto Ind_\gamma(z)$ est une fonction continue.

(iii) $Ind_\gamma(.)$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, et est nulle sur la composante non-bornée .

Démonstration: (i) Soit $g(t) = \displaystyle\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds$ alors aux points où $\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z_0}$ est continue, on a $g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}$ Par suite $\dfrac{d}{dt} e^{-g(t)}(\gamma(t) - z_0) = 0$ au point où $g'(t)$ existe, et alors $e^{-g(t)}(\gamma(t) - z_0)$ est constante par morceaux sur $[a, b]$. Mais, $e^{-g(t)}(\gamma(t) - z_0)$ est continue, donc elle est constante sur $[a, b]$. On obtient alors $e^{-g(a)}(\gamma(a) - z_0) = e^{-g(b)}(\gamma(b) - z_0)$. Comme γ est un lacet $\gamma(a) = \gamma(b)$, ce qui entraîne $e^{-g(a)} = e^{-g(b)}$. D'autre part $g(a) = 0$, d'où $e^{-g(b)} = 1$ par conséquent il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $g(b) = 2in\pi$ i.e.

$$n = \frac{g(b)}{2i\pi} = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{(z - z_0)} dz = Ind_\gamma(z_0)$$

(ii) Fixons $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, et soit $r > 0$ tel que le disque $D(z_0; 2r)$ soit contenu dans $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ tel que $|z - z_0| \leq r$ on a

$$Ind_\gamma(z) - Ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{(\xi - z)} d\xi - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{(\xi - z_0)} d\xi = \frac{z_0 - z}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{((\xi - z)(\xi - z_0))} d\xi \tag{3.22}$$

Comme pour tout $\xi \in \gamma^*$ on a $|\xi - z_0| \geq 2r$ et $|\xi - z| \geq r$, donc

$$|Ind_\gamma(z) - Ind_\gamma(z_0)| \leq \frac{|z_0 - z|}{4\pi r^2} \lambda(\gamma) \tag{3.23}$$

ce qui prouve la continuité.

(iii) Comme $Ind_\gamma(.)$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors elle est constante sur cheque composante connexe.

On notera que γ^* est un sous-ensemble borné de $\mathbb{C}$, d'où il existe $R > 0$ tel que $\gamma^* \subset \overline{D}(0; R)$, alors, la composante non-bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ est le domaine contenu dans $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ et contenant $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0; R)$. On notera par C_∞ cette composante.

Soit $z_0 \in C_\infty$ tel que $|z_0| > R$. Comme $|z - z_0| \geq |z_0| - R$ sur γ^*, on a

$$|Ind_\gamma(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \Big| \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz \Big| \leq \frac{1}{2\pi} . \frac{1}{|z_0| - R} \lambda(\gamma) \tag{3.24}$$

et donc $|Ind_\gamma(z_0)|$ tend vers 0 lorsque $|z_0|$ vers $+\infty$. Comme $Ind_\gamma(z)$ est constante dans le domaine C_∞, cette constante est 0. ∎

3.5.5 EXEMPLE. Soit $\gamma_n : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto Re^{2in\pi t}$, $\quad n \in \mathbb{Z}^*$. Alors, $Ind_\gamma(z_0) = \begin{cases} n & \text{si } z_0 \in D(0; R), \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0; R). \end{cases}$

L'ensemble $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ a deux composantes, une bornée $D(0; R)$ et une non-bornée $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0; R)$.

Si $z_0 \in D(0; R)$ alors $Ind_\gamma(z_0) = Ind_\gamma(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{z} dz = n$

Si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0; R)$, alors $Ind_\gamma(z_0) = 0$.

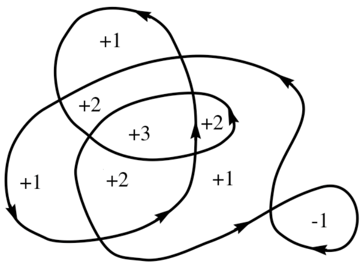
Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ un lacet. On appelle intérieur de γ, l'ensemble

$$Int(\gamma) := \{z \in \mathbb{C}; Ind_\gamma(z) \neq 0\}$$

et extérieur de γ, l'ensemble

$$Ext(\gamma) := \{z \in \mathbb{C}; Ind_\gamma(z) = 0\}.$$

On a $\mathbb{C} = Int(\gamma) \cup \gamma^* \cup Ext(\gamma)$.
Comme $Ind_\gamma(z)$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, $Int(\gamma)$ et $Ext(\gamma)$ sont des ouverts et leurs frontières vérifient : $\partial(Int(\gamma)) \subset \gamma^*$ et $\partial(Ext(\gamma)) \subset \gamma^*$.



Dans ce dessin, chaque nombre répresente la valeur de l'indice d'un point ce trouvant dans le domaine correspondant. L'indice vaut 0 pour les points dans le domaine non borné.

3.5.2 Une méthode de calcul de l'indice

Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin et $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ et $u \in \mathbb{C}^*$. On suppose que la demi-droite de direction u et d'origine z_0 coupe γ en un nombre fini de points $\gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots \gamma(t_n)$, $(0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n)$ tels que les tangentes $\gamma'(t_i)$ existent et ne sont pas parallèles à u i.e. $\{u, \gamma'(t_i)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ pour tout $i \in \{1, 2 \dots, n\}$. On pose

$$\sigma_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \det[u, \gamma'(t_i)] > 0, \\ -1 & \text{si } \det[u, \gamma'(t_i)] < 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

Alors, $Ind_\gamma(z_0) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$.

S'il existe une demi-droite de direction $u \in \mathbb{C}^*$ et d'origine z_0 qui ne coupe pas γ alors $Ind_\gamma(z_0) = 0$.

3.5.6 Exercice Démontrer ce résultat.

3.5.3 Cycles

Un cycle est une somme algébrique finie de lacets, noté $\Gamma = n_1\gamma_1 + \cdots + n_p\gamma_p$, où les γ_i sonts des lacets et les coefficients n_i sont des éléments de $\mathbb{Z}$.
Le support d'un cycle Γ, noté Γ^*, est par définition la réunion des images des γ_i i.e. $\cup_{i=1}^{p}\gamma_i^*$. On définit aussi la longueur d'un cycle Γ par le nombre

$$\lambda(\Gamma) := \sum_{i=1}^{p} |n_i|\lambda(\gamma_i)$$

Enfin on a pour toute fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et tout cycle $\Gamma = n_1\gamma_1 + \cdots + n_p\gamma_p$ dont le support est contenu dans Ω, l'intégrale de f le long du cycle Γ est définie par :

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = n_1 \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + n_p \int_{\gamma_p} f(z)\,dz \tag{3.26}$$

On remarquera, que pour un domaine Ω donné, les théorèmes qu'on a démontré pour des lacets contenu dans Ω sont encore valables pour tout cycle Γ contenu dans Ω. Par exemple, l'indice d'un point $z_0 \in \Omega$ par rapport au cycle $\Gamma = n_1\gamma_1 + \cdots + n_p\gamma_p$ est égal à :

$$Ind_\Gamma(z_0) := \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{1}{(z-z_0)}\,dz = n_1.Ind_{\gamma_1}(z_0) + \cdots + n_p.Ind_{\gamma_p}(z_0) \tag{3.27}$$

On définit de même l'intérier de Γ par l'ensemble

$$Int(\Gamma) := \{z \in \mathbb{C}; Ind_\Gamma(z) \neq 0\}$$

et l'extérieur de γ, l'ensemble

$$Ext(\Gamma) := \{z \in \mathbb{C}; Ind_\Gamma(z) = 0\}.$$

On a $\mathbb{C} = Int(\Gamma) \cup \Gamma^* \cup Ext(\Gamma)$.

3.5.7 DÉFINITION
Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$. Un cycle Γ dans Ω est dit homologue à 0 dans Ω et on note $\Gamma \sim 0$, si $Int(\Gamma) \subset \Omega$.

On dit que deux cycles Γ et Γ' sont homologues dans Ω si $\Gamma - \Gamma' \sim 0$ dans Ω.

3.6 Formule de Cauchy globale et applications

Dans l'étude précédente dans le traitement du théorème de Cauchy-Goursat et de la formule intégrale de Cauchy on a considéré que les domaines circulaires (i.e. les disques). Pour l'étude des propriétés locales des fonctions holomorphes ceci a été suffisant, mais pour l'étude de domaines plus généraux ceci s'avère incomplet.

Pour la généralisation de ces résultats, on a deux directions : la première est de déterminer les domaines où la formule de Cauchy est valable, et la deuxième direction est de déterminer pour un domaine donné quels sont les lacets γ pour lequels la la formule de Cauchy est valable.

3.6.1 Théorème (Formule de Cauchy globale)

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et Γ un cycle tel que $\Gamma \sim 0$.
Alors pour tout $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ on a

$$Ind_\Gamma(z).f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi. \tag{3.28}$$

Démonstration: Considérons la fonction g définie dans $\Omega \times \Omega$ par

$$g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si } z \neq w \\ f'(z) & \text{si } z = w \end{cases} \tag{3.29}$$

On remarquera que pour tout $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$, $\int_\Gamma g(z,\xi)\,d\xi = 0$ est équivalent à $Ind_\Gamma(z).f(z) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$.

On va alors montrer que pour tout $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$, $\int_\Gamma g(z,\xi)\,d\xi = 0$.

3.6.3 Lemme

La fonction g est continue dans $\Omega \times \Omega$ et la fonction h définie par $h(z) := \int_\Gamma g(z,\xi)\,d\xi$ est une fonction holomorphe dans Ω.

Démonstration: (du lemme) Soit $(a,b) \in \Omega \times \Omega$.
Si $a \neq b$, alors dans un voisinage de (a,b), $g(z,w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ est holomorphe.
Supposons maintenant que $a = b$. Comme f est analytique dans Ω, il existe un disque $D(a;r) \subset \Omega$ tel que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ pour tout $z \in D(a;r)$. Alors pour $(z,w) \in D(a;r) \times D(a;r)$, $z \neq w$,

$$\begin{aligned} g(z,w) =& \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(w-a)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n}{w-z} \\ =& \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(w-a)^n - (z-a)^n}{w-z} = a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n q_n(w,z) = g(a,a) + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n q_n(w,z) \end{aligned} \tag{3.30}$$

où $q_n(w,z) = \sum_{j=1}^{n}(w-a)^{n-j}(z-a)^{j-1}$. Comme $|q_n(w,z)| \leq nr^{n-1}$, il s'en suit que pour $0 < \epsilon \leq \frac{r}{2}$ et $|w-a| < \epsilon$,$|z-a| < \epsilon$

$$|g(w,z) - g(a,a)| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n|\epsilon^{n-1} \leq \epsilon\left(\sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n|\left(\frac{r}{2}\right)^{n-2}\right)$$

par suite $\lim_{\epsilon\to 0} g(w,z) - g(a,a) = 0$, d'où la continuité de g. Pour montrer que $h(z) = \int_\Gamma g(z,\xi)\, d\xi$ est holomorphe dans Ω, il suffit de montrer que pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe un disque $D(z_0;r) \subset \Omega$ tel que pour tout triangle $\Delta \subset D(z_0,r)$. $\int_{\partial\Delta} h(z)\, dz = 0$.
Comme, $\Delta \times \Gamma^*$ est compact, g est uniformément continue dans $\Delta \times \Gamma^*$ et d'après le théorème de Fubini

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\, dz = \int_{\partial\Delta}\int_\Gamma g(z,\xi)\, d\xi\, dz = \int_\Gamma \int_{\partial\Delta} g(z,\xi)\, dz\, d\xi.$$

Comme pour ξ fixé, l'application $\xi \mapsto g(z,\xi)$ est holomorphe dans Ω, on a d'après le théorème de Goursat $\int_{\partial\Delta} g(z,\xi)\, dz = 0$, et par suite $\int_{\partial\Delta} h(z)\, dz = 0$. Ce qui termine la preuve du Lemme. ∎

On va maintenant, montrer que h admet un prolongement en une fonction entière $\tilde{h}$ telle que $\lim_{|z|\to+\infty} \tilde{h}(z) = 0$, et le théorème de Liouville va nous permetre de conclure. Posons $U := Ext(\Gamma) = \{z \in \mathbb{C}; Ind_\Gamma(z) = 0\}$. Alors U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et comme par hypothèse on a $Ind_\Gamma(z) = 0$ pour tout $z \notin \Omega$ on a $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset U$ et donc $\mathbb{C} = \Omega \cup U$. Soit h^* la fonction définie dans U par $h^*(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$. On va montrer que h^* est holomorphe dans U et que $\lim_{|z|\to+\infty} h^*(z) = 0$. Pour montrer que h^* est holomorphe, on utilise pour cela la fonction auxiliaire $g^*(z,w) = \frac{f(w)}{w-z}$ et le lemme précédent. Maintenant, $|h^*(z)| \leq \max_{\xi\in\Gamma^*} \left|\frac{f(\xi)}{\xi-z}\right| \lambda(\Gamma)$, Comme Γ^* est compact, on a $\max_{\xi\in\Gamma^*} |f(\xi)| < +\infty$ et $\max_{\xi\in\Gamma^*} \left|\frac{1}{\xi-z}\right| \leq \frac{1}{||z| - \max_{\xi\in\Gamma^*}|\xi||}$.
Par suite $|h^*(z)| \leq \frac{1}{||z| - \max_{\xi\in\Gamma^*}|\xi||}. \max_{\xi\in\Gamma^*} |f(\xi)|.\lambda(\Gamma)$ d'où $\lim\limits_{|z|\to+\infty} h^*(z) = 0$.
Si $z \in \Omega \cap U$ et $z \notin \Gamma^*$, alors

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_\Gamma g(z,\xi)\, d\xi = h(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\, d\xi \\ &= \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - f(z)\int_\Gamma \frac{1}{\xi - z}\, d\xi = h^*(z) - 2i\pi f(z) Ind_\Gamma(z) = h^*(z) \end{aligned} \tag{3.31}$$

car $Ind_\Gamma(z) = 0$.
Par conséquent la fonction $\tilde{h}$ définie dans $\mathbb{C}$ par

$$\tilde{h}(z) = \begin{cases} h(z) & \text{si } z \in \Omega \\ h^*(z) & \text{si } z \in U \end{cases} \tag{3.32}$$

est une fonction entière telle que $\lim\limits_{|z|\to+\infty} \tilde{h}(z) = 0$, d'après le théorème de Liouville, $\tilde{h}$ est identiquement nulle, d'où $\int_\Gamma g(z,\xi)\, d\xi = h(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$. ∎

3.6.5 Corollaire

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et Γ un cycle de Ω.

Les conditions suivantes sont équivalentes

i) $Int(\Gamma) \subset \Omega$ (i.e. $\Gamma \sim 0$.)

ii) pour tout $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et pour tout $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$.

$$Ind_\Gamma(z).f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

iii) pour tout $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

$$\int_\Gamma f(\xi)\, d\xi = 0$$

Démonstration: .

(i) ⇒ (ii) C'est le théorème précédent.

(ii) ⇒ (iii) Soit $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$. On pose $F(w) := (w - z)f(w)$, alors $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $F(z) = 0$. Par suite

$$\int_\Gamma f(\xi)\, d\xi = \int_\Gamma \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2i\pi.Ind_\Gamma(z).F(z) = 0.$$

(iii) ⇒ (i) Soit $z \notin \Omega$, alors la fonction $f(w) = \frac{1}{w-z}$ est holomorphe dans Ω et par suite $Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{1}{\xi - z} d\xi = \int_\Gamma f(\xi)\, d\xi = 0.$

■

3.6.1 Développement en série de Laurent

Soit $r, R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, 0 \leq r < R$. L'ouvert $C(a; r; R) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, r < |z - a| < R\}$ est appelé couronne de centre a, de rayon intérieur r et de rayon extérieur R.

3.6.7 PROPOSITION

Soit f une fonction holomorphe dans la couronne $C(a; r; R)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les intégrales

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(a;s)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$$

ne dépendent pas de s, $(r < s < R)$.

Démonstration: Soit $r < s < s' < R$ alors $C(a; s) \sim C(a; s')$ dans $C(a; r; R)$. On applique alors le théorème précédent au cycle $\Gamma = C(a; s) - C(a; s')$ et à la fonction $\dfrac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}$ holomorphe dans $C(a; r; R)$. ■

3.6.9 THÉORÈME

Soit f une fonction holomorphe dans la couronne $C(a;r;R)$. Alors f est développable en série de la forme

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

dite **série de Laurent**, qui est convergente normalement sur tout compact $K \subset C(a;r;R)$. De plus pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $s \in]r,R[$ on a, $a_n = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{C(a;s)} \dfrac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$.

Démonstration: Fixons $z \in C(a;r;R)$ et s, s' tels que $r < s < |z-a| < s' < R$. Comme indice de z par rapport au cycle $\Gamma = C(a;s') - C(a;s)$ est égal à 1, la formule de Cauchy nous donne

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a;s')} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi - \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a;s)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi$$

En écrivant $\dfrac{1}{(\xi - z)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$ avec convergence normale dans $C(a;s')$, et $\dfrac{1}{(\xi - z)} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$ avec convergence normale dans $C(a;s)$. On a donc

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a;s')} f(\xi) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi + \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a;s)} f(\xi) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}} d\xi$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C(a;s')} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \right) (z-a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C(a;s)} f(\xi)(\xi-a)^n d\xi \right) \frac{1}{(z-a)^{n+1}}$$

d'où le résultat. ∎

3.6.11 DÉFINITION

Soit $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ le développement en série de Laurent de f dans la couronne $C(a;r;R)$. La partie $f_-(z) = \sum_{-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n$ est appelée **partie principale** (ou partie singulière) du développement de f et $f_+(z) = \sum_{0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ la **parie régulière**.

3.6.12 REMARQUE

Le développement en série de Laurent est unique.

3.6.13 EXEMPLE. 1. $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Si $a = i$ et $C(a; r; R) = C(i; 0; 2)$. Alors $f(z) = \dfrac{1}{2i}\dfrac{1}{z-i} - \dfrac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(i-z)^n}{(2i)^{n+1}} = \dfrac{1}{2i}\dfrac{1}{z-i} + \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2i)^{n+2}}(z-i)^n$.

2. $f(z) = exp(\frac{1}{z})$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\} = C(0; 0; +\infty)$. Le développement en série de Laurent de $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{z^n} = 1 + \sum_{-\infty}^{-1}\dfrac{z^n}{(-n)!}$ sa partie régulière est 1 et sa partie principale est $\sum_{-\infty}^{-1}\dfrac{z^n}{(-n)!}$.

3.6.14 COROLLAIRE
Pour toute fonction f holomorphe dans la couronne $C(a; r; R)$, l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_{C(a;s)} f(z)\,dz$ pour tout $r < s < R$, est égale au coefficient a_{-1} du terme $\frac{1}{z-a}$ du développement en série de Laurent de f.

3.6.15 COROLLAIRE (THÉORÈME DE PROLONGEMENT DE RIEMANN)
Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω sauf peut être en un point $z_0 \in \Omega$ et tel que $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$.
Alors f admet un prolongement (unique) en une fonction holomorphe sur Ω.

Démonstration: On pose pour $zn^o = z_0$, $g(z) = (z - z_0)^2 f(z)$ et $g(z_0) = 0$. Alors g est holomorphe sur Ω, et $g'(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$. Alors le développement en série entière de g au voisinage de z_0 est de la forme $g(z) = \sum_{2}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$, d'où $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^2} = \sum_{0}^{+\infty} a_{n+2}(z - z_0)^n$.

Ainsi f est holomorphe au voisinage de z_0 et le prolongement holomorphe dans Ω, $\tilde{f}$ de f, s'obtient en posant

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} a_2 & \text{si } z = z_0 \\ f(z) & \text{si } z \neq z_0 \end{cases} \tag{3.33}$$

■

3.6.2 Singularités

On dit qu'une fonction f a une singularité isolée en un point z_0 s'il existe $r > 0$ tel que f soit holomorphe dans le disque épointé $D^*(z_0; r) = D(z_0; r) - \{z_0\}$. Comme $D^*(z_0; r)$ est une couronne, $f(z)$ y admet un développement en série de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$.

Il y a 3 types de singularités isolées :

i) **Singularité apparente (ou fausse singularité)**
f a une fausse singularité a en z_0 si pour tout $n < 0$, les coefficients $a_n = 0$ (i.e. sa partie principale est nulle.) Dans ce cas f admet un prolongement holomorphe au disque $D(z_0; r)$ (Théorème de prolongement de Riemann.)

ii) **Pôle**
f a un pôle d'ordre $m > 1$ en z_0 si pour tout $n < -m$, les coefficients $a_n = 0$ et $a_{-m} \neq 0$. Dans ce cas $f(z) = \sum_{-m}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$. On dit aussi que f est méromorphe en z_0.

iii) **Singularité essentielle**
f a une singularité essentielle en z_0 si pour une infinité de $n < 0$, les coefficients $a_n \neq 0$.

3.6.17 Exemple. 1. $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ a une singularité apparente en 0, car son développement en série de Laurent dans $D^*(0, 1)$ est $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n}$.

2. $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ a deux singularités isolées i et $-i$. On a vu que dans le disque épointé $D^*(i; 2) = C(i; 0; 2)$, $f(z) = \displaystyle\frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(z-i)^n}{(2i)^{n+2}}$. donc f a un pôle d'ordre 1 en i. De même f a un pôle d'ordre 1 en $-i$. (pour voir cela développer f en série de Laurent dans $D^*(-i; 2) = C(-i; 0; 2)$.)

3. $f(z) = exp(\frac{1}{z})$ a une singularité isolée en $z = 0$. On a vu que dans $\mathbb{C} \setminus \{0\} = C(0; 0; +\infty) = D^*(0; +\infty)$, le développement en série de Laurent de $f(z) = 1 + \displaystyle\sum_{-\infty}^{-1} \frac{z^n}{(-n)!}$ d'où $a_n = \frac{1}{(-n)!} \neq 0$ pour tout $n < 0$, et donc f a une singularié essentielle en $z = 0$.

3.6.3 Le théorème des résidus

3.6.18 Définition
On appelle **résidu** de f au point z_0, noté $Res(f, z_0)$, le coefficient a_{-1} du développement en série de Laurent de f dans un disque épointé $D^*(z_0; r)$.

3.6.19 Proposition
Soit f une fonction holomorphe dans $D^*(z_0; R)$.
Alors pour tout lacet γ contenu dans $D^*(z_0; R)$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\,dz = Res(f, z_0) Ind_\gamma(z_0) \tag{3.34}$$

Démonstration: Comme f est holomorphe dans la couronne $C(z_0;0;R) = D^*(z_0;R)$ elle y admet un développement en série de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, qui converge uniformément sur tout compact $K \subset D^*(z_0;R)$, d'où

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\Big(\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (z-z_0)^n\,dz\Big)$$

mais,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ Ind_\gamma(z_0) & \text{si } n = -1 \end{cases} \tag{3.35}$$

■

D'où $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz = a_{-1}Ind_\gamma(z_0) = Res(f,z_0)Ind_\gamma(z_0)$.

3.6.21 THÉORÈME (THÉORÈME DES RÉSIDUS)

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$. Soit A un sous-ensemble discret de Ω et Γ un cycle contenu dans $\Omega \setminus A$ tel que $\Gamma \sim 0$ dans Ω.

Alors pour toute fonction f holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus A$, on a (la formule des résidus)

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{a\in A} Res(f,a)Ind_\Gamma(a) \tag{3.36}$$

Démonstration: Soit $B = \{a \in A; Ind_\Gamma(a) \neq 0\}$. B est alors contenu dans le complémentaire W de la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, qui est compact.
Montrons que B est fini.
Sinon, il existe une suite $\{a_n\}$ de points de B, deux à deux disjoints, qui converge vers un point $a \in W$. Comme B est discret dans Ω, $a \notin \Omega$, et par suite $a \notin \Gamma^*$, par conséquent l'indice de a par rapport a Γ est bien défini et $Ind_\Gamma(a) = \lim_{n\to+\infty} Ind_\Gamma(a_n)$, par continuité de la fonction indice. D'où $Ind_\Gamma(a) \neq 0$, mais ceci contredit l'hypothèse que $\Gamma \sim 0$. Donc la somme $\sum_{a\in A} Res(f,a)Ind_\Gamma(a)$ se réduit à la somme finie $\sum_{a\in B} Res(f,a)Ind_\Gamma(a)$. Notons $B = \{a_1,\ldots,a_m\}$.
En chaque $a_j \in B$, f admet un développement en série de Laurent $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^j(z-a_j)^n$ dans un disque $D(a_j,r_j) - \{a_j\} \subset \Omega \setminus (\Gamma^* \cup A)$. On peut choisir les rayons r_j assez petit, pour que les disques $\overline{D(a_j,r_j)}$ soient disjoints.
On remarquera que chaque partie principale définit une fonction holomorphe P_j sur $\mathbb{C} - \{a_j\}$, $P_j(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_{-n}^j}{(z-a_j)^n}$ et que $\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma P_j(z)\,dz = Res(f,a_j)Ind_\Gamma(a_j)$.
La fonction $g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^m P_j(z)$ admet un prolongement en une fonction holomorphe sur Ω (en effet, en a_j, $f(z) - P_j(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^j(z-a_j)^n$ dans $D(a_j,r_j)$ et $\sum_{j'\neq j} P_{j'}$

est holomorphe sur $D(a_j, r_j)$) et comme $Int(\Gamma) \subset \Omega$, la formule de Cauchy globale nous donne :

$$0 = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma g(z)\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(z)\,dz - \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma P_j(z)\,dz\right)$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(z)\,dz - \sum_{i=1}^{m} Res(f, a_i) Ind_\Gamma(a_i)$$

3.7 Annexe

3.7.1 Calcul pratique des résidus

Soit Ω un domaine et $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ tels que g et h sont holomorphes dans Ω et h non identiquement nulle. Alors les zéros de h sont isolés dans Ω. Comme chaque zéro a de h est de multiplicité finie, f est méromorphe en ce point.On va calculer le résidus de f au point a, distinguons deux cas :
(1) a est un pôle simple i.e. d'ordre 1.
Si a est un pôle simple, on a dans un disque épointé $D^*(a,r)$, $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_0^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$.
Alors $(z-a)f(z) = a_{-1} + \sum_0^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n+1}$ et donc $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = a_{-1} = Res(f,a)$.
Dans le cas où $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ on a, $\lim_{z\to a}(z-a)\dfrac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z\to a} g(z)\dfrac{z-a}{h(z)-h(a)} = \dfrac{g(a)}{h'(a)}$ et d'où $Res(f,a) = \dfrac{g(a)}{h'(a)}$.
(2) a est un pôle d'ordre $m \geq 2$.
Si a est un pôle d'ordre $m \geq 2$, on a dans un disque épointé $D^*(a,r)$,
$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_0^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$.
Alors, $(z-a)^m f(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + \sum_0^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n+m}$ et d'où
$Res(f,a) = \lim_{z\to a}\left[\dfrac{(z-a)^m f(z)}{(m-1)!}\right]^{(m-1)}$.

3.7.2 Application du théorème des résidus au calcul intégral

Il s'agit de calculer une intégrale définie d'une fonction d'une variable réelle sans expliciter de primitive. L'idée est de trouver une fonction holomorphe convenable et un cycle convenable qui permettent de calculer l'intégrale cherchée. En pratique les cycles choisit sont des lacets simples i.e. divise le plan complexe en deux composantes connexes, une bornée d'indice 1 et l'autre non bornée d'indice 0. Dans ce cas la formule des résidus ne tient compte que des points intérieurs. La méthode de calcul des intégrales par la méthode des résidus utilise souvent l'idée de limite sur des cycles dans la situation des lemmes suivants (souvent attribués à C.Jordan).

3.7.1 Lemme (Lemme A)

1) Soit f une fonction continue sur l'ensemble

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z-a| < r, \alpha_1 \leq \arg(z-a) \leq \alpha_2\} \qquad a \in \mathbb{C}, r > 0, \alpha_1 < \alpha_2.$$

Soit γ_ρ l'arc de cercle de centre a de rayon ρ contenu dans S_1. La condition

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \in S_1}} (z-a) f(z) = 0$$

entraîne que $\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\rho} f(z)\, dz = 0$.
2) Soit f une fonction continue sur l'ensemble

$$S_2 = \{z \in \mathbb{C}; |z-a| > R, \alpha_1 \leq \arg(z-a) \leq \alpha_2\} \qquad a \in \mathbb{C}, R > 0, \alpha_1 < \alpha_2.$$

Soit γ_ρ l'arc de cercle de centre a de rayon ρ contenu dans S_2. La condition

$$\lim_{\substack{|z| \to +\infty \\ z \in S_2}} (z-a) f(z) = 0$$

entraîne que $\lim_{\rho \to +\infty} \int_{\gamma_\rho} f(z)\, dz = 0$.

Démonstration: Dans les deux cas la longueur de γ_ρ est égales à $(\alpha_2 - \alpha_2)\rho$. Alors

$$\Big| \int_{\gamma_\rho} f(z)\, dz \Big| \leq (\alpha_2 - \alpha_1)\rho \sup_{z \in \gamma_\rho} |f(z)| = (\alpha_2 - \alpha_1) \sup_{z \in \gamma_\rho} |(z-a) f(z)|,$$

et l'hypothèse assure le résultat. ■

3.7.3 Lemme (Lemme B)

Soit g une fonction continue dans le demi-plan supérieur $\mathcal{H}^+ = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ tendant vers 0 lorsque $|z| \to +\infty$ dans $\mathcal{H}^+$. Soit C_ρ le demi-cercle de centre 0 et de rayon ρ contenu dans $\mathcal{H}^+$. Alors pour tout $\alpha > 0$ fixé, on a

$$\lim_{\rho \to +\infty} \int_{C_\rho} e^{i\alpha z} g(z)\, dz = 0$$

Démonstration: Ceci va dépendre de l'inégalité suivante

$$\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin(\theta) \quad \text{pour} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

On écrit $z = \rho e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. L'intégrale devient

$$I_\rho = \int_{C_\rho} e^{i\alpha z} g(z)\, dz = \int_0^\pi e^{i\alpha\rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))} g(\rho e^{i\theta}) i\rho e^{i\theta}\, d\theta.$$

Soit M_ρ le maximum de $|g(z)|$ sur C_ρ, alors $|I_\rho| \leq \rho \int_0^\pi |g(\rho e^{i\theta})| e^{-\alpha\rho\sin(\theta)}\, d\theta \leq \rho M_\rho \int_0^\pi e^{-\alpha\rho\sin(\theta)}\, d\theta \leq 2\rho M_\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha\rho\sin(\theta)}\, d\theta \leq 2\rho M_\rho \frac{1-e^{-\alpha\rho}}{\alpha\rho\frac{2}{\pi}} \leq \frac{\pi}{\alpha} M_\rho$ On termine la preuve en utilisant l'hypothèse $\lim_{\rho \to +\infty} M_\rho = 0$. ■

3.7.5 LEMME (LEMME C)
Soit a un pôle simple de la fonction f, γ_ρ un arc de cercle de centre a et de rayon ρ (orienté dans le sens positif), d'ouverture angulaire α, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Alors

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\rho} f(z)\, dz = i\alpha Res(f,a).$$

Démonstration: Comme a est un pôle simple, le développement de Laurent de f dans une couronnne $D^*(a,\epsilon)$ donne,

$$f(z) = \frac{Res(f,a)}{z-a} + g(z)$$

et une constante $M > 0$ telle que $|g(z)| \leq M$ pour tout $z \in D^*(a,\epsilon)$. Alors

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)\, dz = Res(f,a) \int_{\gamma_\rho} \frac{1}{z-a}\, dz + \int_{\gamma_\rho} g(z)\, dz$$

Un calcul direct donne

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{1}{z-a}\, dz = i\alpha$$

D'autre part $\left| \int_{\gamma_\rho} g(z)\, dz \right| \leq M\lambda(\gamma_\rho) = M\alpha\rho \to 0$ lorsque $\rho \to 0$. ■

Intégrale de fractions rationnelles de fonctions trigonométriques

Soit $R = \frac{P}{Q}$ où $P, Q \in \mathbb{C}[x,y]$, telle que Q ne s'annule en aucun point du cercle unité $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 = 1\}$. On considère l'intégrale :

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt \tag{3.37}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $z = e^{it}$ alors $dt = \frac{dz}{iz}$, $\sin t = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$ et $\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Soit F la fraction rationnelle en z définie par

$$F(z) = R\Big(\frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big)\Big)\frac{1}{iz}$$

Soit γ le cercle unité orienté dans le sens positif et A l'ensemble des pôles de F dans le disque unité, alors

$$I = \int_\gamma F(z)\, dz = 2i\pi \sum_{z \in A} Res(F,z) Ind_\gamma(z) = 2i\pi \sum_{z \in A \cap D(0,1)} Res(F,z) \tag{3.38}$$

3.7.7 EXEMPLE. Soit à Calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t}\, dt$, $a > 1$. Dans ce cas $R(x,y) = \frac{1}{a+x}$ et alors $F(z) = \frac{1}{i} \frac{1}{a+\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})} \frac{1}{z} = \frac{2}{z^2+2ia-1}$.
D'autre part $z^2 + 2aiz - 1 = (z - (-ia + i\sqrt{a^2-1}))(z - (-ia - i\sqrt{a^2-1}))$, donc le

seul pôle de F dans $D(0;1)$ est $z_0 = -ia + i\sqrt{a^2-1}$. Ce pôle est simple et le résidu en ce point se calcule par

$$Res(F, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)F(z) = \frac{2}{2(-ia+i\sqrt{a^2-1})+2ia} = \frac{1}{i\sqrt{a^2-1}}$$

D'où $I = 2i\pi\dfrac{1}{i\sqrt{a^2-1}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

Intégrale de fractions rationnelles d'une variable réelle

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une continue telle que $\lim_{|x|\to+\infty} xf(x) = 0$; alors f est intégrable sur $\mathbb{R}$. On veut calculer

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

3.7.8 EXEMPLE. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $\deg Q \geq \deg P + 2$ et $Q(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On suppose que la fonction f admet une extension holomorphe F à $\mathbb{C} \setminus A$ où A est un ensemble fini disjoint de $\mathbb{R}$, telle que $\lim_{|z|\to+\infty} zF(z) = 0$. Soit $r > 0$ assez grand, tel que le disque de centre 0 et de rayon r contient A. On pose $U_r = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) \geq 0 \text{ et } |z| \leq r\}$ et γ_r le demi-cercle de centre 0 et de rayon r contenu dans U_r. D'après le théorème des résidus appliqué à F et au lacet $[-r, r] \cup \gamma_r$ (orienté dans le sens positif), on a

$$\int_{-r}^{+r} f(x)\,dx + \int_{\gamma_r} F(z)\,dz = \int_{\partial U_r} F(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a\in A\cap U_r} Res(F, a)$$

D'après le Lemme A, pour $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi$, on a $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_r} F(z)\,dz = 0$, de plus $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{+r} f(x)\,dx = I$ car f est intégrale sur $\mathbb{R}$, d'où

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2i\pi \sum\{\text{les résidus de } F \text{ dans le demi-plan supérieur}\}$$

3.7.9 EXEMPLE. Soit à calculer $I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}$. Dans ce cas $F(z) = \frac{1}{z^4+1}$ est une extension de f holomorphe dans
$\mathbb{C} \setminus \{e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}\}$ et $\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} zF(z) = 0$. Les pôles de F sont simples et seulement $e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $e^{\frac{3i\pi}{4}}$ sont dans le demi-plan supérieur. D'où

$$\begin{aligned} I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1} &= 2i\pi\Big(Res\Big(\frac{1}{z^4+1}, e^{\frac{i\pi}{4}}\Big) + Res\Big(\frac{1}{z^4+1}, e^{\frac{3i\pi}{4}}\Big)\Big) \\ &= 2i\pi\Big(-\frac{1}{4}e^{\frac{i\pi}{4}} - \frac{1}{4}e^{\frac{3i\pi}{4}}\Big) = 2i\pi\Big(-\frac{i}{2\sqrt{2}}\Big) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{3.39}$$

Transformées de Fourier

I) Soit f une fonction de la variable réelle x admettant une extension holomorphe F à $\Omega \setminus A$, où Ω est un voisinage ouvert du demi-plan supérieur $\mathcal{H}^+ = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ et A un ensemble fini disjoint de $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{|z|\to+\infty} F(z) = 0$. Soit $\alpha > 0$ un réel fixé. On veut calculer $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$. Soit $r > 0$ assez grand, tel que le disque de centre 0 et de rayon r contient A. On pose $U_r = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}(z) \geq 0 \,\text{et}\, |z| \leq r\}$ et γ_r le demi-cercle de centre 0 et de rayon r contenu dans U_r. Le théorème des résidus appliqué à $F(z)e^{i\alpha z}$ et au lacet $[-r, r] \cup \gamma_r$ (orienté dans le sens positif), nous donne

$$\int_{-r}^{+r} f(x)e^{i\alpha x}\,dx + \int_{\gamma_r} F(z)e^{i\alpha z}\,dz = \int_{\partial U_r} F(z)e^{i\alpha z}\,dz = 2i\pi \sum_{a\in A\cap U_r} Res(Fe^{i\alpha z}, a)$$

D'après le Lemme B, $\lim\limits_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} F(z)e^{i\alpha z}\,dz = 0$, d'où

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{+r} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = 2i\pi \sum \{\text{ résidus de } F(z)e^{i\alpha z} \text{ dans le demi-plan supérieur}\}$$

Si de plus $f(x)e^{i\alpha x}$ est intégrable on a :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = 2i\pi \sum \{\text{ résidus de } F(z)e^{i\alpha z} \text{ dans le demi-plan supérieur}\}$$

3.7.10 Remarque
Si $\alpha < 0$ on obtient en prenant les résidus dans le demi-plan inférieur $\mathcal{H}^- = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$.

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{+r} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = -2i\pi \sum \{\text{ résidus de } F(z)e^{i\alpha z} \text{ dans le demi-plan inférieur}\}$$

3.7.11 Exemple. Soit à calculer pour $b > 0$, $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+b^2}\,dx$. Comme $f(x) = \frac{\cos x}{x^2+b^2}$ est une fonction paire on a $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+b^2}\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+b^2}\,dx\right)$. Le seul pôle de $F(z) = \frac{1}{z^2+b^2}$ dans $\mathcal{H}^+$ est ib et ce pôle est simple, d'où

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+b^2}\,dx\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(2i\pi Res(\frac{e^{ix}}{x^2+b^2}, ib)\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(2i\pi\frac{e^{-b}}{2ib}\right) = \frac{\pi e^{-b}}{2b}.$$

II) On examine maintenant le cas où $F(z)$ a des singularités sur l'axe des réels i.e. $A \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Soit $x_1 < \cdots < x_n$ les points singuliers de F dans $\mathbb{R}$. On suppose que les x_i sont des pôles simples. Dans ce cas il convient de modifier le chemin d'intégration afin de contourner les points x_i. Soit $r > 0$ assez grand, tel que le disque de centre 0 et de rayon r contient A. Soit γ_r le demi-cercle de centre 0 et de rayon r contenu dans $\mathcal{H}^+$ et $\gamma_\epsilon(j)$ le demi-cercle de centre x_j et de rayon ϵ contenu dans $\mathcal{H}^+$. D'après

le théorème des résidus appliqué à $F(z)e^{i\alpha z}$ et au lacet
$\gamma_r \cup [-r, x_1 - \epsilon] \cup \left(\cup_{j=1}^{n} \gamma_\epsilon(j)\right) \cup \left(\cup_{j=1}^{n-1} [x_j + \epsilon, x_{j+1} - \epsilon]\right) \cup \gamma_\epsilon(n) \cup [x_n + \epsilon, r]$ (orienté dans le sens positif), on a

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_r} F(z)e^{i\alpha z}\,dz + \int_{-r}^{x_1-\epsilon} f(x)e^{i\alpha x}\,dx + \sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_\epsilon(j)} F(z)e^{i\alpha z}\,dz + \\
&\sum_{j=1}^{n-1}\int_{[x_j+\epsilon, x_{j+1}-\epsilon]} f(x)e^{i\alpha x}\,dx + \int_{x_n+\epsilon}^{r} f(x)e^{i\alpha x}\,dx \\
&= 2i\pi \sum_{a\in A\cap\mathcal{H}^+} Res(Fe^{i\alpha z}, a)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Le Lemme C nous donne $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon(j)} F(z)e^{i\alpha z}\,dz = -i\pi Res(F(z)e^{i\alpha z}, x_j)$, et le Lemme B, $\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_r} F(z)e^{i\alpha z}\,dz = 0$, d'où

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{r\to+\infty\\ \epsilon\to 0}} \int_{-r}^{x_1-\epsilon} f(x)e^{i\alpha x}\,dx + \sum_{j=1}^{n-1}\int_{x_j+\epsilon}^{x_{j+1}-\epsilon} f(x)e^{i\alpha x}\,dx + \int_{x_n+\epsilon}^{r} f(x)e^{i\alpha x}\,dx \\
&= 2i\pi \sum\{\text{ résidus de } F(z)e^{i\alpha z} \text{ dans le demi-plan supérieur ouvert}\} \\
&\quad + i\pi \sum\{\text{ résidus de } F(z)e^{i\alpha z} \text{ dans } \mathbb{R}\}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Si de plus $f(x)e^{i\alpha x}$ est intégrable on a :

$$\begin{aligned}
I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx =& 2i\pi \sum\{\text{ résidus de } F(z)e^{i\alpha z} \text{ dans le demi-plan supérieur ouvert}\} \\
&+ i\pi \sum\{\text{ résidus de } F(z)e^{i\alpha z} \text{ dans } \mathbb{R}\}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

3.7.12 EXEMPLE. Soit à calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.
$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2i}\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx\right]$ D'après ce qui précède

$$\frac{1}{2i}\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx\right] = \frac{1}{2i}(i\pi Res(\frac{e^{iz}}{z}, 0)) = \frac{1}{2i}(i\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

et de l'intégrabilité (au sens de Riemann) de $\frac{\sin x}{x}$ sur $\mathbb{R}$, on obtient $I = \frac{\pi}{2}$.

Intégrales de fonctions ayant $x^{-\alpha}$ en facteur, $\alpha \in]0,1[$

Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus A$, A fini disjoint de $\mathbb{R}_+$, telle que $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$, alors $x^{-\alpha}f(x)$ est intégrale sur $\mathbb{R}_+$; Il s'agit de calculer $I = \int_0^{+\infty} x^{-\alpha}f(x)\,dx$. Pour toute détermination $l(z)$ de $Ln(z)$, on a la détermination $e^{-\alpha l(z)}$ de $z^{-\alpha}$. On prend la détermination sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ définie par

$$Ln(z) = Ln|z| + i\arg(z) \quad \text{avec} \quad 0 < \arg(z) < 2\pi.$$

Soit $r > 0$ assez grand, tel que le disque de centre 0 et de rayon r contient A et $\epsilon > 0$ assez petit, tel que le disque fermé de centre 0 et de rayon ϵ ne rencontre pas A. Soit $\gamma_r(\eta)$ l'arc de cercle de centre 0 et de rayon r et d'ouverture angulaire $\eta \leq \theta \leq 2\pi - \eta$, $\gamma_\epsilon(\eta)$ l'arc de cercle de centre 0 et de rayon ϵ et d'ouverture angulaire $\eta \leq \theta \leq 2\pi - \eta$, $[re^{i\eta}, \epsilon e^{i\eta}]$ et $[\epsilon e^{i(2\pi-\eta)}, re^{i(2\pi-\eta)}]$ des segments. Soit $\Gamma(\epsilon, r, \eta)$ le lacet (orienté positivement) obtenu en joignant tous ces chemin. On choisit $\eta > 0$ assez petit pour que A soit à l'intérieur de $\Gamma(\epsilon, r, \eta)$. D'après le théorème des résidus

$$\int_{\Gamma(\epsilon,r,\eta)} z^{-\alpha} f(z)\, dz = 2i\pi \sum \{ \text{ résidus de } z^{-\alpha} f(z) \text{ dans } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \}$$

Soit $g(z) = z^{-\alpha} f(z)$. Comme $|zg(z)| = |z^{1-\alpha} f(z)| = |z|^{1-\alpha}|f(z)|$, $\alpha \in]0, 1[$, $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$ et f holomorphe en 0 on alors $\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ |z|\to 0}} zg(z) = 0$ et d'après le Lemme A

$$\lim_{\substack{\eta\to 0 \\ \epsilon\to 0}} \int_{\gamma_\epsilon(\eta)} z^{-\alpha} f(z)\, dz = \lim_{\substack{\eta\to 0 \\ r\to+\infty}} \int_{\gamma_r(\eta)} z^{-\alpha} f(z)\, dz = 0.$$

D'autre part

$$\lim_{\substack{\eta\to 0 \\ \epsilon\to 0 \\ r\to+\infty}} \int_{[re^{i\eta}, \epsilon e^{i\eta}]} z^{-\alpha} f(z)\, dz = \int_{+\infty}^{0} x^{-\alpha} f(x)\, dx$$

et

$$\lim_{\substack{\eta\to 0 \\ \epsilon\to 0 \\ r\to+\infty}} \int_{[\epsilon e^{i(2\pi-\eta)}, re^{i(2\pi-\eta)}]} z^{-\alpha} f(z)\, dz = \int_{0}^{+\infty} x^{-\alpha} e^{-2i\alpha\pi} f(x)\, dx$$

Alors, lorsque $\eta \to 0$, $\epsilon \to 0$ et $r \to +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\eta\to 0 \\ \epsilon\to 0 \\ r\to+\infty}} \int_{\Gamma(\epsilon,r,\eta)} z^{-\alpha} f(z)\, dz &= \int_0^{+\infty} x^{-\alpha} f(x)\, dx - \int_0^{+\infty} x^{-\alpha} e^{-2i\alpha\pi} f(x)\, dx \\ &= (1 - e^{-2i\alpha\pi}) I = \frac{2i \sin(\alpha\pi)}{e^{i\alpha\pi}} I \end{aligned} \tag{3.43}$$

Finalement

$$I = \int_0^{+\infty} x^{-\alpha} f(x)\, dx = \frac{\pi e^{i\alpha\pi}}{\sin(\alpha\pi)} \sum \{ \text{ résidus de } z^{-\alpha} f(z) \text{ dans } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \}.$$

3.7.13 EXEMPLE. Montrons que pour $1 < a < 2$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{2\sin(\frac{a\pi}{2})}.$$

Les pôles de $\frac{z^{a-1}}{z^2+1}$ sont $\pm i$ et sont simples, alors

$$Res(\frac{z^{a-1}}{z^2+1}, i) = \frac{i^{a-1}}{2i} \quad Res(\frac{z^{a-1}}{z^2+1}, -i) = -\frac{(-i)^{a-1}}{2i}$$

et leur somme est égale à

$$\frac{i^{a-1}}{2i} - \frac{(-i)^{a-1}}{2i} = \frac{1}{2i}(e^{(a-1)\frac{i\pi}{2}} - e^{(a-1)\frac{3i\pi}{2}}) = -\frac{1}{2}(e^{\frac{ai\pi}{2}} + e^{\frac{3ai\pi}{2}}) = -e^{ai\pi}\cos(\frac{a\pi}{2})$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi e^{-ai\pi}}{\sin(a\pi)} e^{ai\pi}\cos(\frac{a\pi}{2}) = \frac{\pi\cos(\frac{a\pi}{2})}{\sin(a\pi)} = \frac{\pi}{2\sin(\frac{a\pi}{2})}.$$

Intégrale de fonctions ayant $Ln(x)$ en facteur

Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus A$, A fini disjoint de $\mathbb{R}_+$, telle que $\lim_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0$, alors $f(x)Ln(x)$ est intégrale sur $\mathbb{R}_+$; Il s'agit de calculer $I = \int_0^{+\infty} f(x)Ln(x)\,dx$.

On prend la détermination sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ définie par $Ln(z) = Ln|z| + i\arg(z)$ avec $0 < \arg(z) < 2\pi$.

Le théorème des résidus appliqué à $f(z)\big(Ln(x)\big)^2$ et au lacet $\Gamma(\epsilon, r, \eta)$, nous donne lorsque $\eta \to 0\,, \epsilon \to 0$ et $r \to +\infty$

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} f(x)\big(Ln(x)\big)^2\,dx - \int_0^{+\infty} f(x)\big(Ln(x) + 2i\pi\big)^2\,dx \\ &= -4i\pi \int_0^{+\infty} f(x)Ln(x)\,dx - 4\pi^2\pi \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \\ &= 2i\pi \sum\{ \text{ residus de } f(z)\big(Ln(z)\big)^2 \} \end{aligned} \tag{3.44}$$

Si l'on sait calculer $J = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ la formule précédente fournit $I = \int_0^{+\infty} f(x)Ln(x)\,dx$.

Dans le cas où $f(x)$ est à valeurs réelles, par séparation des parties réelle et imaginaire dans la formule précédente on obtient I et J.

3.7.14 EXEMPLE. On veut calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{Ln(x)}{(1+x)^2}\,dx$ La fonction $\frac{(Ln(z))^2}{(1+z)^2}$ a un pôle de multiplicité 2 en $z = -1$ d'où $Res(\frac{(Ln(z))^2}{(1+z)^2}, -1) = \lim_{z\to-1}\big((1+z)^2\frac{(Ln(z))^2}{(1+z)^2}\big)' = -2i\pi$. Alors $I = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}(-2i\pi) = 0$.

Formule sommatoire de Poisson

Soit$a > 0$ et f une fonction holomorphe sur la bande $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\operatorname{Im} z| < a\}$ telle que $|f(x+iy)| \leq \frac{A}{1+x^2}$ pour tout $z = x+iy \in \Omega$.

Par exemple $f(z) = e^{-\pi z^2}$.

On a alors la formule de sommation de Poisson :

3.7.15 THÉORÈME

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$$

Démonstration: La fonction $\frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}$ a des pôles simples en $z_n = n \in \mathbb{Z}$ de résidu $\frac{f(n)}{2i\pi}$.

Soit $0 < b < a$, alors, le théorème des résidus appliqué au contours suivant : $\gamma_N = [-N-\frac{1}{2}-ib, N+\frac{1}{2}-ib] \cup [N+\frac{1}{2}-ib, N+\frac{1}{2}+ib] \cup [N+\frac{1}{2}+ib, -N-\frac{1}{2}-ib]$ donne

$$\int_{\gamma_N} \frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}\,dz = \sum_{-N}^{N} f(n).$$

Comme par hypothèse sur f, $|f(n)| \leq \frac{A}{1+n^2}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$ converge.

Lorsque N tend vers $+\infty$, les intégrales sur les segments verticaux tendent vers 0,

comme $\int_{[-N-\frac{1}{2}-ib, N+\frac{1}{2}-ib]} \frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}\,dz = \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} \frac{f(x-ib)}{e^{2i\pi(x-ib)}-1}\,dz$
et $\int_{[N+\frac{1}{2}+ib, -N-\frac{1}{2}+ib]} \frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}\,dz = -\int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} \frac{f(x+ib)}{e^{2i\pi(x+ib)}-1}\,dz$
on aura :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+ib)}{e^{2i\pi(x+ib)}-1}\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-ib)}{e^{2i\pi(x-ib)}-1}\,dx.$$

D'autre part, $|e^{2i\pi(x+ib)}| = e^{-2\pi b} < 1$, $\frac{1}{e^{2i\pi(x+ib)}-1} = -\sum_{0}^{+\infty} e^{2i\pi n(x+ib)}$

et $|e^{2i\pi(x-ib)}| = e^{2\pi b} > 1$, $\frac{1}{e^{2i\pi(x-ib)}-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{2i\pi(n+1)(x-ib)}} = \sum_{-\infty}^{-1} e^{2i\pi n(x-ib)}$

Ainsi

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+ib) \sum_{0}^{+\infty} e^{2i\pi n(x+ib)}\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-ib) \sum_{-\infty}^{-1} e^{2i\pi n(x-ib)}\,dx.$$

$$= \sum_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+ib) e^{2i\pi n(x+ib)}\,dx + \sum_{-\infty}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-ib) e^{2i\pi n(x-ib)}\,dx.$$

$$= \sum_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2i\pi nx}\,dx + \sum_{-\infty}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2i\pi n(x)}\,dx.$$

$$= \sum_{0}^{+\infty} \widehat{f}(n) + \sum_{-\infty}^{-1} \widehat{f}(n) = \sum_{n\mathbb{Z}} \widehat{f}(n).$$

3.7.3 Domaine simplement connexe

On a déja vu que si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive dans Ω, par suite le théorème de Cauchy-Goursat n'est pas valable pour ce domaine. On remarquera la présence d'un "trou" dans Ω. On va s'intéresser aux domaines de $\mathbb{C}$ dans lesquels toute fonction holomorphe admet une primitive. On appelle un tel domaine, un domaine simplement connexe. On va montrer que pour tout domaine simplement connexe, la formule de Cauchy est valable.

3.7.17 DÉFINITION

Un domaine Ω de $\mathbb{C}$ est dit **simplement connexe** si pour tout cycle Γ de Ω on a

$$Int(\Gamma) = \{z \in \mathbb{C}; Ind_\Gamma(z) \neq 0\} \subset \Omega$$

i.e. $\Gamma \sim 0$

Ceci est équivalent à dire que si $z \notin \Omega$ alors $Ind_\Gamma(z) = 0$.

3.7.18 PROPOSITION

Dans tout domaine simplement connexe Ω tel que $0 \notin \Omega$, il existe une détermination du logarithme.

Démonstration: Comme Ω est un domaine simplement connexe et $0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, alors $Ind_\Gamma(0) = 0$ pour tout cycle Γ de Ω. En particulier si $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ et donc f admet une primitive dans Ω, c-à-d qu'il existe une détermination du logarithme dans Ω. ∎

3.7.20 PROPOSITION

Tout domaine étoilé Ω est simplement connexe.

Démonstration: Quitte à faire une translation on peut supposer que $a = 0$.
Soit alors $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un lacet et $z_0 \notin \Omega$ fixé. Pour tout $s \in [0,1]$ posons $\Gamma(t,s) = s\gamma(t)$ et définissons le lacet Γ_s par $\Gamma_s(t) = s\gamma(t)$. On a pout tout $s \in [0,1]$, Γ_s est un lacet de Ω (car Ω est étoilé par rapport à 0) et $\Gamma_1 = \gamma$. Puisque la fonction Γ est continue sur le compact $[a,b] \times [0,1]$ son image $K = \cup_{0 \leq s \leq 1} \Gamma_s^*$ est un compact de $\mathbb{C}$ contenu dans Ω (puisque 0 est un centre de Ω). Donc la distance $\delta = dist(z_0, K)$ est strictement positive. Alors pour $0 < s \leq 1$ on pose

$$f(s) = Ind_{\Gamma_s}(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{s\gamma'(t)}{s\gamma(t) - z_0}\,dt = Ind_\gamma\left(\frac{z_0}{s}\right) \tag{3.45}$$

Cette dernière égalité montre que la fonction f est continue puisque $Ind_\gamma(.)$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Il s'en suit que la fonction f est constante, d'où $f(s) = f(1) = Ind_\gamma(z_0)$. Or quand $s \to 0$, $\frac{z_0}{s} \to \infty$ (car $z_0 \neq 0$), d'où pour s assez petit $f(s) = Ind_\gamma(\frac{z_0}{s}) = 0$ et par suite $Ind_\gamma(z_0) = 0$. ∎

3.7.22 EXEMPLE. $\mathbb{C}$, un disque, un demi-plan, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, une bande $B = \{z \in \mathbb{C}; a < \mathrm{Im}(z) < b\}$ sont des domaines simplement connexes.

3.7.23 Exercice Montrer que les ensembles précédents sont des domaines étoilés.

3.7.24 REMARQUE
1) Il existe des domaines simplement connexes et qui ne sont pas étoilés ; par exemple : $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \cup \{z = t + i; -\infty < t < 0\}$.
2) Les ensembles suivants ne sont pas simplement connexes :
(i) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
(ii) l'extérieur du disque unité $\Omega = \mathbb{C} \setminus D(0;1)$.
(iii) Une couronne $C(a;r;R) = \{z \in \mathbb{C}; r < |z-a| < R\}$ n'est pas simplement connexe.

3.7.25 COROLLAIRE
Un domaine de $\mathbb{C}$ est simplement connexe si et seulement si toute fonction holomorphe sur ce domaine admet une primitive.

3.7.26 COROLLAIRE
Soit Ω un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors pour tout cycle Γ de Ω et pour tout $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ on a

$$Ind_\Gamma(z).f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi. \tag{3.46}$$

3.7.27 COROLLAIRE (THÉORÈME DES RÉSIDUSPOUR LES DOMAINES SIMPLEMENT CONNEXES)
Soit Ω un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$. Soit A un sous-ensemble discret de Ω. Alors pour toute fonction f holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus A$ et tout cycle Γ contenu dans $\Omega \setminus A$ on a (la formule des résidus)

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2i\pi \sum_{a \in A} Res(f,a) Ind_\Gamma(a) \tag{3.47}$$
