Chapitre 3

Les espaces de Lebesgue L^p

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\Sigma = \mathcal{B}^n(X)$ la restriction à X de la σ-algèbre borélienne et μ la mesure de Lebesgue.

Soit $p \in [1, +\infty[$. On définit pour toute fonction mesurable $f : X \to \mathbb{C}$ sa "norme L^p" par

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

On note par $\mathcal{L}^p(X)$ l'ensemble des fonctions mesurable à valeurs dans $\mathbb{C}$ pour lesquelles $\|f\|_p < +\infty$.

On notera que $\mathcal{L}^p(X)$ est un espace vectoriel ; en effet, pour $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$ on a : $|\lambda f + \beta g|^p \leq 2^p \max(|\lambda||f|, |\beta||g|)^p \leq 2^p(|\lambda| + |\mu|)^p \max(|f|^p, |g|^p) \leq 2^p(|\lambda| + |\mu|)^p(|f|^p + |g|^p)$. D'où $\lambda f + \beta g \in \mathcal{L}^p(X)$.

$\|\|_p$ n'est pas une norme une $\mathcal{L}^p(X)$, en effet

3.0.3 LEMME

Soit $f : X \to \overline{\mathbb{C}}$ une fonction mesurable. $\|f\|_p = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$ p.p.

Démonstration: Pour $n \geq 1$ on pose $A_n = \{x \in X \mid |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$. Alors $A_n \subset A_{n+1}$ et $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$.

On a pour tout $n \geq 1$, $0 = \int_X |f|^p \, d\mu \geq \int_{A_n} |f|^p \, d\mu \geq \left(\frac{1}{n}\right)^p \mu(A_n)$, ainsi $\mu(A_n) = 0$ et par suite $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n) = 0$. La réciproque est évidente.

3.0.5 REMARQUE

On a montrer qu'à l'inverse si f n'est pas identiquement nulle p.p. alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mu(\{x \in X \mid |f(x)| > \epsilon\}) > 0$.

Il s'en suit que pour obtenir une norme il faudrait identifier les fonctions égales p.p. i.e. $f \sim g$ si et seulement si $\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

On pose alors $\mathcal{N}(X) = \{f \in \mathcal{L}^p(X) \mid f(x) = 0 \text{ p.p. }\}$.

3.0.6 Exercice $\mathcal{N}(X)$ est sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions mesurables.

Comme $\mathcal{N}(X)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p(X)$, on peut définir l'espace vectoriel quotient, pour obtenir

3.0.7 DÉFINITION
$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X)/\mathcal{N}(X)$

Les éléments de $L^p(X)$ sont des classes d'équivalences de fonctions $[f]$, telle que un représentant $f : X \to \overline{\mathbb{C}}$: est mesurable et $\left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} < \infty$

3.0.8 REMARQUE
Grâce au lemme précédent, $\|f\|_p = \|g\|_p$ si $f \sim g$ donc $\|f\|_p$ ne dépend pas du représentant de la classe.

Pour le cas $p = +\infty$, si on considère l'espace des fonctions mesurable et bornées sur X, $B(X)$, muni de la norme du sup et on veut identifier les fonctions égales presque partout, la norme du sup n'est plus indépendante de la classe de fonctions, pour éviter ce problème on définit le supremum essentiel par :

3.0.9 DÉFINITION
Pour toute function mesurable $f : X \to \overline{\mathbb{C}}$ son supremum essentiel (ou sa borne supérieure essentielle) , noté $\|f\|_\infty$, par

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha > 0 \,|\, \mu(\{x \in X ||f(x)| \geq \alpha\}) = 0\}\,.$$

On utilise parfois la notation *esssup* f ou *supess* f pour désigner $\|f\|_\infty$.

On note par $\mathcal{L}^\infty(X)$ l'ensemble des fonctions mesurable à valeurs dans $\mathbb{C}$ pour lesquelles $\|f\|_\infty < +\infty$.

et on définit :

3.0.10 DÉFINITION
$L^\infty(X) = \mathcal{L}^\infty(X)/\mathcal{N}(X)$

Les éléments de $L^\infty(X)$ sont des classes d'équivalences de fonctions $[f]$ (identifié à $f + \mathcal{N}(X)$), telle que un représentant $f : X \to \overline{\mathbb{C}}$: mesurable et $\left(\int_X |f|^\infty \, d\mu\right)^{1/p} < \infty$.

Par commodité, on continuera à considérer les éléments de $L^p(X)$ comme des fonctions, en prenant un représentant de chaque classe d'équivalence.

3.0.11 THÉORÈME
Soit p et q deux exposants conjugués ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), $1 \leq p \leq \infty$. Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré. Soient f et g deux fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{C}}$. Alors on a les inégalités suivantes :

(i) (l'inégalités de Hölder).

$$\int_X |fg|\, d\mu \leq \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q\, d\mu\right)^{1/q}.$$

(ii) (l'inégalité de Cauchy-Schwarz). le cas $p = q = 2$ dans l'inégalité de Hölder.

(iii) (l'inégalité de Minkowski).

$$\left(\int_X |f+g|^p\, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p\, d\mu\right)^{1/p}.$$

C'est l'inégalité triangulaire pour $L^p(X)$: $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Par conséquent $\|.\|_p$ est une nome sur $L^p(X)$.

Démonstration: (i) on va utiliser le lemme suivant :

3.0.13 LEMME

Soit $a, b \geq 0$, $p, q \in [1, +\infty]$ deux exposants conjugués alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Démonstration: Si $ab = 0$ il n'y a rien à montrer. On suppose donc que $a, b > 0$, comme l'application $t \mapsto e^t$ est convexe, on aura

$$ab = exp(\ln ab) = exp(\ln a + \ln b) = exp\left(\frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q}\right)$$

$$\leq \frac{1}{p} exp(\ln a^p) + \frac{1}{q} exp(\ln b^q) \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

■

1) Si $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$, d'après l'inégalité de Young on a :

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg|\, d\mu \leq \int_X \frac{|f|^p}{p}\, d\mu + \int_X \frac{|g|^q}{q}\, d\mu = \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

2) Si $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ alors $|fg| = 0$ p.p., d'où $\int_X |fg| d\mu = 0$ et l'égalité.

3) Si $\|f\|_p > 0$ ou $\|g\|_q > 0$ on pose $f_1 = \frac{f}{\|f\|_p}$ et $g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}$. Alors $\|f_1\|_p = \|g_1\|_q = 1$ et d'après 1) on a $\|f_1 g_1\|_1 \leq 1$ i.e. $\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq 1$.

(ii) c'est seulement le cas $p = q = 2$

(iii) Soient f et g deux fonctions mesurables. D'après l'inégalité de Hölder

$$\|f+g\|_p^p = \int_X |f+g||f+g|^{p-1}d\mu \leq \int_X |f||f+g|^{p-1}d\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1}d\mu$$

$$\leq \|f\|_p \||f+g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p \||f+g|^{p-1}\|_q = \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \|f+g\|_p^{p-1}.$$

Ainsi, $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

3.0.15 Exercice (inégalité de Hôlder généralisée) Soient $p_1, \ldots, p_n, r \in [1, +\infty]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r}$.

Alors pour $f_1, \ldots, f_p : X \to \overline{\mathbb{C}}$ des fonctions mesurables on a :

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} f_i \right\|_r \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{p_i}.$$

(indication : utiliser l'inégalité de Hölder et une récurrence sur n).

3.0.16 Théorème (Quelques propriétés)

1. $L^p(X)$ est un espace complet (i.e. un espace de Banach) pour $p \in [1, +\infty]$.
2. Si $1 \leq p < \infty$, l'espace des fonctions simples à support fini est dense dans $L^p(X)$.
3. Si $1 \leq p < \infty$, pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, l'espace $C_c^k(X)$ des fonctions de classe C^k à support compact, est dense dans $L^p(X)$
4. Si $1 \leq p < \infty$ alors $L^p(X)$ est séparable.
5. Si X est un ouvert non vide, $L^\infty(X)$ n'est pas séparable et les espaces $C_c^k(X)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, ne sont pas denses dans $L^\infty(X)$.

Démonstration: Voir la suite ■

3.0.18 Définition

On appelle support d'une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ et on note $supp(f)$ le sous-ensemble fermé de X, adhérence de l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0$ i.e.
$supp(f) = \overline{\{x \in X \,|\, f(x) \neq 0\}}$.

3.0.19 Théorème (Riesz-Fischer)

Soit $p \in [1, +\infty]$. Alors $L^p(X)$ est un espace de Banach.

Démonstration: On va commencer par le cas $1 \leq p < +\infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^p ; remplaçant au besoin cette suite par une sous-suite on peut supposer que

$$\|f_{n+1} - f_n\|_p \leq \frac{1}{2^n};$$

posant $g_0 = f_0$ et $g_n = f_n - f_{n-1}$, pour $n \geq 1$ et $G = \sum_{n=0}^{+\infty} |g_n|$.

Alors, la suite $G_n = \sum_{k=0}^{n} |g_k|$ est dans $L^p(X)$, en effet pour tout n, $\|G_n\|_p = \| \sum_{k=0}^{n} |g_k| \|_p \leq \sum_{k=0}^{n} \|g_k\|_p \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} + \|f_0\|_p \leq 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \|f_0\|_p \leq 1 + \|f_0\|_p$.

D'autre part, la suite G_n est positive, croissante et $\lim_n G_n(x) = G(x)$, d'après le théorème de convergence monotone

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X G_n^p d\mu = \int_X G^p d\mu$$

i.e. $\|G\|_p = \lim_{n\to+\infty} \|G_n\|_p \leq 1 + \|f_0\|_p$. Ainsi, $G \in L^p(X)$, en particulier, $0 \leq G(x) \leq +\infty$ p.p. par suite la série et $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{C}$, p.p. donc convergente p.p. i.e. $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe p.p. on note par $f(x)$ cette limite quand elle existe et on pose $f(x) = 0$ si la limite n'existe pas. Alors $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ p.p., donc f est mesurable, il reste à montrer que $f \in L^p$ et que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Comme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ p.p., $|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |g_n(x)|$ p.p. d'où $\|f\|_p \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|g_n\|_p \leq +\infty$. i.e. $f \in L^p$. On a $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)|^p = 0$, $|f_n(x) - f(x)|^p \leq 2^p G^p(x)$ p.p. et $2^p G^p \in L^1(X)$, et d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|^p d\mu = 0;$$

on voit ainsi que f_n converge vers f dans L^p.

Le cas $p = +\infty$.

Soit $\sum_n f_n$ une série normalement convergente de $L^\infty(X)$ i.e. $\sum_n \|f_n\|_\infty < \infty$. On doit montrer que la série converge. Posons $A_n = \{x \in X | \, |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\}$. Par définition de $\|.\|_\infty$, A_n est de mesure nulle et par suite $A = \cup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est de mesure nulle et pour tout $x \in X \setminus A$; $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < \infty$. Comme $\mathbb{C}$ est complet, pour tout $x \in X \setminus A$; $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge, on note par $f(x)$ cette somme et pose $f(x) = 0$ si $x \in A$. Alors f est mesurable comme somme d'une série de fonctions mesurables convergeant p.p. et $|f(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$ d'où $f \in L^\infty(X)$.

D'autre part $\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$ pour tout $x \in X \setminus A$ ainsi

$$\left\| f - \sum_{n=0}^{N} f_n \right\|_\infty \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty \to 0 \quad \text{lorsque } N \to +\infty$$

i.e. la série $\sum_n f_n$ converge dans $L^\infty(X)$.

3.0.21 COROLLAIRE
Soit $p \in [1, +\infty]$. Soit f_n et f des fonctions de $L^p(X)$ telles que $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_p = 0$; il existe alors une sous-suite f_{n_k} qui converge presque partout vers f.
De plus, il existe une fonction $g \in L^p$ telle que $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ p.p.

Démonstration: Cela résulte de la démonstration du théorème précédent. ■

3.1 Approximation dans L^p, $(1 \leq p < +\infty)$.

On va montrer que l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact est dense dans $L^p(X)$. Soit E l'espace des fonctions simples $g : X \to \mathbb{C}$ telles que $\mu(\{x \in X | \, g(x) \neq 0\}) < \infty$. Pour $g = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \in E$ on a $\|g\|_p \leq \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \mu(A_i)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ d'où $E \subset L^p(X)$.

3.1.1 THÉORÈME
Si $1 \leq p < +\infty$, alors E est dense dans $L^p(X)$.

Démonstration: Soit f une fonction positive telle que $f \in L^p$. D'après 2.0.52, il existe une suite croissante de fonctions simples positives S_n telle que $S_n \nearrow f$.

Alors $\mu(\{x \in X \,|\, S_n(x) \neq 0\}) = \mu(\{x \in X \,|\, S_n(x) \geq m_n\}) = \mu(\{x \in X \,|\, S_n^p(x) \geq m_n^p\}) \leq \frac{1}{m_h^p} \int_X S_n^p d\mu \leq \frac{1}{m_h^p} \int_X f^p d\mu < \infty$. Ainsi $S_n \in E$.

D'autre part, $0 \leq S_n \leq f$ entraîne $0 \leq (f - S_n)^p \leq f^p$; d'après le théorème de convergence dominée $\lim_{n \to +\infty} \|f - S_n\|_p = 0$.

Le cas f à valeurs réelles se réduit au cas positive en écrivant $f = f^+ - f^-$ et celui de f à valeurs complexes par la décomposition $f = \mathfrak{Re}(f) + i\mathfrak{Im}(f)$. ■

3.1.3 COROLLAIRE
Pour $1 \leq p < +\infty$, $L^p(X)$ est séparable.

Démonstration: L'ensemble des fonctions indicatrices $\mathbb{1}_A$ avec $A \in \Sigma$ et $\mu(A) < +\infty$ est une famille totale de $L^p(X)$ par construction de l'intégrale.

Soit $A \in \Sigma$ fixé avec $\mu(A) < +\infty$. D'après la régularité de la mesure, il existe une suite décroissante d'ouverts O_n telle que $\mu(A) = \lim_{n \to +\infty} \mu(O_n)$. Comme $\mu(A) < +\infty$, on peut supposer $\mu(O_n) < +\infty$, et donc $\mu(O_n \setminus A) = \mu(O_n) - \mu(A) \to 0$. Une application du théorème de convergence dominée nous donne $\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{O_n}\|_p \to 0$.

D'où l'ensemble des fonctions indicatrices $\mathbb{1}_O$ avec O ouvert et $\mu(O) < +\infty$ est une famille totale de $L^p(X)$.

Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable de la topologie de X. Alors tout ouvert O s'écrit $O = \cup_{i=1}^{+\infty} \tilde{O}_i$ avec $\tilde{O}_i \in \mathcal{B}$.

Posant $D = \{$réunion finie d'éléments de $\mathcal{B}\}$. Alors D est dénombrable et tout ouvert O est limite d'une suite croissante d'élément de D à savoir $U_n = \cup_{i=1}^{n} \tilde{O}_i$. Alors d'après le théorème de convergence dominée $\|\mathbb{1}_O - \mathbb{1}_{U_n}\|_p \to 0$ et ainsi D est une famille totale. ∎

3.1.5 Définition

Le support d'une fonction f ,d'un espace topologique E à valeurs dans $\mathbb{C}$ est l'adhérence de $\{x \in E | f(x) \neq 0\}$, qu'on notera $supp(f)$.

3.1.6 Théorème

Soit $1 \leq p < +\infty$. Alors $C_c(X)$, l'espace des fonctions continues de $X \to \mathbb{C}$ à support compact, est dense dans $L^p(X)$.

Démonstration: Comme dans la démonstration précédente, en utilisant la régularité de la mesure, on montre que pour $A \in \Sigma$ fixé avec $\mu(A) < +\infty$, il existe une suite croissante de compacts K_n, telle que $\mu(A \setminus K_n) = \mu(A) - \mu(O_n) \to 0$. Ainsi, l'ensemble des fonctions indicatrices $\mathbb{1}_K$ avec K compact est une famille totale de $L^p(X)$.

Il suffit donc de montrer que pour K compact de X, $\mathbb{1}_K$ peut être approchée à ϵ près par une fonction continue à support compact pour la norme de $L^p(X)$. Soit $\epsilon > 0$. La régularité de la mesure, il existe un ouverts Ocontenant K tel que $\mu(O \setminus K) = \mu(O) - \mu(K) < \epsilon$.

Comme X est localement compact, on peut supposer, quitte à prendre un ouvert plus petit, que $\overline{O}$ est compact. D'après le lemme d'Urysohn, il existe une fonction continue $f_\epsilon : X \to [0,1]$ telle que $f_\epsilon|_K = 1$ et $f_\epsilon|_{X\setminus O} = 0$. Comme

$$\int_X |f_\epsilon - \mathbb{1}_K|^p \, d\mu = \int_{O\setminus K} |f_\epsilon|^p \, d\mu \leq \mu(O \setminus K) < \epsilon.$$

Ainsi $\|f_\epsilon - \mathbb{1}_K\|_p \to 0$, f_ϵ est continue et $supp(f_\epsilon) \subset \overline{O}$ est compact. ∎

3.1.8 Lemme (Urysohn)

Soit F et G deux fermés disjoints d'un espace métrique E. Alors il existe $g : E \to [0,1]$ continue telle que $g|_F = 1$ et $g|G = 0$.

Démonstration: On note $d(x,F)$ la distance de x à F, de même, $d(x,G)$, est la distance de x à G. Alors la fonction $g(x) = \dfrac{d(x,G)}{d(x,F) + d(x,G)}$ convient. ∎

Approximation par des fonctions C^∞

Approximation de l'identité : On va commencer par construire une fonction ϕ : $R^n \to [0,1]$ de classe C^∞ et à support compact contenu dans la boule unité fermée.
Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $h(t) = \begin{cases} exp(\frac{1}{t-1}) & \text{si } t < 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$.
Alors, h est C^∞ et $supp(h) =]-\infty, 1]$.
La fonction $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ définie par $\phi(x) = h(\|x\|_2^2)$ est C^∞ et $supp(\phi) = h^{-1}(]-\infty,1] = \overline{B(0,1)}$. Enfin, $\phi > 0$ dans $B(0,1)$ d'où $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx > 0$.

On pose : $\psi(x) := \dfrac{\phi(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx}$ et $\psi_k(x) = k^n \psi(kx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Alors, ψ_k est de classe C^∞, positive, $supp(\psi_k) = \overline{B(0, \frac{1}{k})}$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(x)\, dx = 1$.

Une telle famille de fonctions $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ est appelée **une approximation de l'identité** (ou encore une famille régularisante).

3.1.10 PROPOSITION
Soit $\{\psi_k\}_{k \geq 1}$ une approximation de l'identité. Alors pour toute fonction continue a support compact $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, la fonction f_k définie par
$f_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(x-y) f(y)\, dy$ est de classe C^∞, à support compact et
$\lim_{k \to +\infty} \|f_k - f\|_\infty = 0$.

Démonstration: Voir le paragraphe sur le produit de convolution. ∎

3.1.12 THÉORÈME
Soit $1 \leq p < +\infty$. Alors $\mathcal{D}(X) = C_c^\infty(X)$, l'espace des fonctions de classe C^∞ de $X \to \mathbb{C}$ à support compact, est dense dans $L^p(X)$.

Démonstration: Soit $f \in L^p(X)$ et $\epsilon > 0$. Comme $C_c(X)$ est dense dans $L^p(X)$, il existe une fonction continue à support compact g telle que $\|f - g\|_p \leq \epsilon$. En posant $g(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^n \setminus X$, on peut supposer que $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$. D'après le lemme précédent, il existe $N(\epsilon) > 0$ tel que pour $k \geq N(\epsilon)$, $\|f - f_k\|_\infty \leq \epsilon$.
Comme $supp(f - f_k) \subset \cup_{k \geq 1} supp(f) - \overline{B(0, \frac{1}{k})} \subset K = \{x \in \mathbb{R}^n | D(x, supp(f)) \leq 1\}$,
K est compact et de mesure finie, on pose $M = \mu(F) < +\infty$.
Alors $\|f - f_k\|_p \leq M^{\frac{1}{p}}.\|f - f_k\|_\infty \leq M^{\frac{1}{p}}.\epsilon$.
Finalement, l'inégalité triangulaire nous donne pour $k \geq N(\epsilon)$, $\|f - f_k\|_p \leq \epsilon(M^{\frac{1}{p}} + 1)$. ∎

3.1.14 REMARQUE
1) L'ensemble des fonctions continues à support compact n'est pas dense dans $L^\infty(X)$, si X est un ouvert dense.

Soit $f = 3\mathbb{1}_X$. S'il existe une suite $f_n \in C_c(X)$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_{infty} = 0$.

Alors, il existe $N > 0$ tel que $\|f_n - f\|_{infty} \leq 1$ si $n \geq N$.

Ainsi, $1 - f_N(x) \leq f(x) \leq 1 + f_N(x)$ p.p., comme $supp(f_N)$ est compact, $U = x \setminus supp(f_N)$ est un ouvert non vide et

$f = 1$ p.p. sur U. Ceci contredit le fait que $f = 3$ p.p.

2) L^∞ n'est pas séparable.

En effet, la famille $\{f_r = \mathbb{1}_{B(0,r)}\}_{r \in \mathbb{R}_+}$ est non-dénombrable, contenue dans L^∞ et $\|f_r - f_s\|_\infty = \|\mathbb{1}_{B(0,r)} - \mathbb{1}_{B(0,s)}\|_\infty = 1$ si $r \neq s$.

S'il existe une suite (g_n) dense dans L^∞, alors pour tout $r > 0$, il existe $n_r \in \mathbb{N}$ tel que $\|g_{n_r} - f_r\|_\infty < \frac{1}{3}$. Ceci entraîne que l'application $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{N}$ $r \to n_r$ est injective i.e. le cardinal de $\mathbb{N}$ est supérieur ou égal à celui de $\mathbb{R}_+$ ce qui est absurde. elle ne pourra pas être approchée par un ensemble dénombrable.

3.1.15 Exercice Soit $0 < p < r < q$. Montrer que si (X, Σ, μ) est un espace mesuré, alors

$$L^r(\mu) \subseteq L^p(\mu) + L^q(\mu).$$

Solution: Soit $f \in L^r(\mu)$. Alors $|f|^r \in L^1(\mu)$. Soit

$$A = \{x \in X \,:\, |f(x)| > 1\}$$

$$B = \{x \in X \,:\, |f(x)| \leq 1\}.$$

On pose $g = f\mathbb{1}_A$ et $h = f\mathbb{1}_B$. Alors $f = g + h$ et comme $0 < p < r < q$, $|g|^p, |h|^q \leq |f|^r$ sur X. Ainsi, $f \in L^r(\mu)$ entraîne $g \in L^p(\mu)$ et $h \in L^q(\mu)$. ∎

3.1.17 Exercice (inégalité de Markov) Soit $f \in L^p$. Alors $\mu(\{x \in X \,|\, |f(x)| > t\}) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{t}\right)^p$.

Voici une justification de la notation $\|.\|_\infty$.

3.1.18 Exercice Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré. Soit $f \in L^r(X), 0 < r < +\infty$
Montrer que $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Solution: Soit $0 < t < \|f\|_\infty$. Par définition de $\|f\|_\infty$, l'ensemble $A = \{x \in X \,|\, |f(x)| > t\}$ est de mesure > 0. Alors $0 < \mu(A) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{t}\right)^p$, d'où $\|f\|_p \geq t\mu(A)^{\frac{1}{p}}$.

Si $\mu(A) = +\infty$ alors $\|f\|_p = +\infty$ alors $\|f\|_p \geq \|f\|_\infty$.

Si $\mu(A) < +\infty$ alors $\lim_{t \to +\infty} \mu(A)^{\frac{1}{p}} = 1$ d'où $\liminf \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$.

Dans tous les cas $\liminf \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$.

Soit $r < p < +\infty$. Alors $\|f\|_p \leq (\|f\|_\infty)^{1 - \frac{r}{p}} (\|f\|_r)^{\frac{r}{p}}$.

En effet, $\int_X |f|^p \, d\mu = \int_X |f|^{p-r} |f|^r \, d\mu \leq (\|f\|_\infty)^{p-r} \int_X |f|^r \, d\mu = (\|f\|_\infty)^{p-r} (\|f\|_r)^r$, en prenant la racine p-ieme des deux côtés on obtient le résultat.

Comme $\|f\|_r < +\infty$, $\lim_{p \to +\infty} (\|f\|_r)^{\frac{r}{p}} = 1$, ainsi $\limsup \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.

Finalement, on obtient $\liminf \|f\|_p \geq \|f\|_\infty \geq \limsup \|f\|_p$, d'où $\lim \|f\|_p$ existe et $\lim \|f\|_p = \|f\|_\infty$. ∎

Voici un exemple de fonction à valeurs finies presque partout, qui est dans L^1 mais pas dans L^2.

3.1.20 Exercice Soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ si $0 < x < 1$ et $f(x) = 0$ pour $x \notin]0,1[$. Soit $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de nombres rationnels. On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x-r_n)}{2^n}$.
Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ (et donc $g(x) < \infty$ p.p.) mais, que $g \notin L^2(\mathbb{R})$.

Solution: On a , $\int_{\mathbb{R}} f = \int_0^1 f = 2$, alors que $\int_{\mathbb{R}} f^2 = \infty$. Ainsi, $f \in L^1(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^2(\mathbb{R})$. D'après le corollaire du théorème de convergence monotone, on a

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}} f(x-r_n)\,dx.$$

Par invariance par translation de la mesure de Lebesgue, le membre de droite est égale à $\|f\|_1 \sum \frac{1}{2^{n-1}}$, est donc fini, d'où $g \in L^1$, et donc $g(x) < \infty$ p.p.

Comme $g(x) < \infty$ p.p., $g^2(x) < \infty$ p.p. Mais, en élevant au carré et en ignorant les termes produits on a

$$\int_{\mathbb{R}} [g(x)]^2\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \int_{\mathbb{R}} [f(x-r_n)]^2\,dx.$$

Maintenant le membre de droite est égal à $+\infty$, d'où, $g \notin L^2$. ■

3.2 Produit de convolution

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables.

3.2.1 DÉFINITION (CONVOLUTION)
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ soit intégrable on pose

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy.$$

On dit que le produit de convolution $f * g$ de f par g existe (p.p.) si pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f * g(x)$ existe.

3.2.2 PROPOSITION

i) $\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)}$.

ii) Le produit de convolution est commutatif :
pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on a

$$f * g = g * f$$

iii) Le produit de convolution est associatif :
pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

Démonstration: i) Si $x \notin \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$ alors, $(x - \operatorname{supp}(f)) \cap \operatorname{supp}(g) = \emptyset$ ainsi $f(x-y).g(y) = 0$ pour presque tout y, d'où $f * g(x) = 0$.

ii) Soit $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)\,dz = g * f(x)$$

on appliquant le changement de variables $y \mapsto z = x - y$.

iii)

$$(f * g) * h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y-z)h(z)\,dz\right)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x-t-z)h(z)\,dz\right)\,dt = \int_{\mathbb{R}^n}\left(f(t)\int_{\mathbb{R}^n} g((x-z)-t))\,dt\right)h(z)\,dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g(x-z))\,h(z)\,dz = (f * g) * h$$

3.2.4 EXEMPLE. 1. Soit $0 < b < a$, $f = \mathbb{1}_{[-b,b]}$, $g = \mathbb{1}_{[-a,a]}$

$$\text{Alors } f * g(x) = \begin{cases} 2b & \text{si } |x| \leq a-b \\ a+b-|x| & \text{si } a-b \leq |x| \leq a+b \\ 0 & \text{si } |x| \geq a-b \end{cases}$$

2. Soit $a \neq b$, $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$, $g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$

$$\text{Alors } f * g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{b-a} & \text{si } |x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3. Si $0 < a + b$, $f(x) = e^{-ax^2}$, $g = e^{-bx^2}$
Alors $f * g(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a+b}}e^{-\frac{ab}{a+b}x^2}$

3.2.5 COROLLAIRE
$(L^1(\mathbb{R}^n), *)$ est une algèbre de Banach (i.e. $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\,\|g\|_1$) (sans élément unité)

3.2.6 Exercice Montrer qu'il n'existe pas de $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $f * g = g$ pour tout $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

3.2.7 Théorème (l'inégalité de Young)
Soit p, q et $r \in [1,+\infty]$ tels que, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$.
Alors pour f et g des fonctions mesurables de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ on a :

$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|h\|_q$$

En particulier, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, alors $f*g \in L^r(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration: On a $|f*g(x)| \leq |f|*|g|(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\,dy$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} \, |f(x-y)|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} |g(y)||^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\,dy$$

Comme $1=(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})+(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})+\frac{1}{r}$, l'inégalité de Hölder généralisée 3.0.15 nous donne :

$$|f*g(x)| \leq \| \,(|f|^p(x-.)|g|^q)^{\frac{1}{r}} \, \|_r . \||f|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}(x-.)\|_{\frac{pr}{r-p}} . \||g|^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|_{\frac{qr}{r-q}}$$

d'où

$$|f*g(x)| \leq (|f|^p * |g|^q(x))^{\frac{1}{r}} \, \|f\|_p^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|g\|_q^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}.$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f*g(x)|^r\,dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p * |g|^q(x)\,dx\right) \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q}$$

$$\leq (\||f|^p\|_1 \||g|^q\|_1) \, \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} = (\|f\|_p^p \|g\|_q) \, \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q}$$

finalement, $\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ ∎

3.2.9 Remarque
On a les cas particuliers de l'inégalité de Young.

1. Si $p=q=1$, alors $r=1$ et si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $f*g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
2. Si $p \in [1,+\infty]$ et q son exposant conjugué i.e. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors $r=+\infty$. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, alors $f*g \in L^\infty$ et $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
3. Si $p \in [1,+\infty]$ et $q=1$ alors , $r=p$ et si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $f*g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\|f*g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$.

3.2.10 Proposition (continuité de la translation)
Pour $h \in \mathbb{R}^n$, on définit la translation τ_h par $\tau_h f(x) = f(x-h)$.
Soit $p \in [1,+\infty[$ alors :

1. $\tau_h : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ est une application unitaire.

2. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ on a $\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$.

Démonstration: 1. D'après l'invariance par translation de l'intégrale de Lebesgue on a

$$\|\tau_h f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx = \|f\|_p^p.$$

2. Soit $f \in L^p$ et $\epsilon > 0$. Par densité, il existe $f_\epsilon \in C_c(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f - f_\epsilon\|_p \leq \epsilon$. Alors, $\|\tau_h f - f\|_p \leq \|\tau_h f - \tau_h f_\epsilon\|_p + \|\tau_h f_\epsilon - f_\epsilon\|_p + \|f_\epsilon - f\|_p$ Comme $\|\tau_h f - \tau_h f_\epsilon\|_p = \|f_\epsilon - f\|_p \leq \epsilon$, d'où $\|\tau_h f - f\|_p \leq 2\epsilon + \|\tau_h f_\epsilon - f_\epsilon\|_p$.
   Maintenant, f_ϵ est continue à support compact, elle est donc uniformément continue, i.e. il existe $\delta > 0$ tel que $|f_\epsilon(x-h) - f_\epsilon(x)| \leq \epsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $|h| < \delta$, alors, $\|\tau_h f_\epsilon - f_\epsilon\|_p \leq \mu(K)^{\frac{1}{p}} \|\tau_h f_\epsilon - f_\epsilon\|_\infty = \mu(K)^{\frac{1}{p}} \epsilon$.
   Finalement, si $|h| < \delta$, on aura $\|\tau_h f - f\|_p \leq \epsilon(2 + \mu(K)^{\frac{1}{p}})$
   i.e. $\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$.

3.2.12 Proposition

Soit $p \in [1, +\infty[$ et q son exposant conjugué i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $f \in L^p$ et $g \in L^q$, alors $f * g$ est uniformément continue et bornée.

Démonstration: D'après l'inégalité de Hölder $|f * g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$ d'où $f * g$ est bornée. D'autre part

$$|f * g(x) - f * g(z)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(z-y)) g(y) \, dy \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_x f - \tau_z f) g(y) \, dy \right|$$
$$\leq \|\tau_{x-z} f - f\|_p . \|g\|_q$$

Comme $p \in [1, +\infty[$, d'après la proposition précédente, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|h\| \leq \delta$

entraîne $\|\tau_h f - f\|_p \leq \epsilon$

Donc $|f * g(x) - f * g(z)| \leq \epsilon \|g\|_q$ dès que $\|x - z\| \leq \delta$, i.e. $x \mapsto f * g(x)$ est uniformément continue.

3.2.1 Dérivation d'un produit de convolution

Une des propriété importante du produit de convolutionest que la fonction $f * g$ est au moins aussi régulière que f ou g.
Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice, on on désigne par $\partial^\alpha f$ la dérivée partielle

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

où $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ est la longueur du multi-indice α.

3.2.14 Remarque

La formule de Leibnitz nous donne pour f et $g \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$:

$$D^\alpha(f.g) = \sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbb{N}^n \\ \beta+\gamma=\alpha}} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} \partial^\beta f . \partial^\gamma g$$

où $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$, $\beta! = \beta_1! \dots \beta_n!$ et $\gamma! = \gamma_1! \dots \gamma_n!$.

3.2.15 Théorème

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ et $g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ alors $f * g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$ on a

$$D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$$

Démonstration: Comme $supp(f * g) \subset \overline{supp(f) + supp(g)}$, est $supp(f * g)$ est compact comme sous-ensemble fermé d'un compact. Pour montrer $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ on utilise le théorème de dérivation sous le signe intégral. Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, la fonction $x \mapsto f(y)D^\alpha g(x-y)$ est continue. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\overline{B(x_0, r)}$ une boule fermée centrée en x_0. Pour tout $x \in \overline{B(x_0, r)}$ on a

$$|f(y)D^\alpha g(x-y)| \leq \left(\sup_{y \in supp(f)} |D^\alpha g(x-y)| \right) |f(y)| \leq \left(\sup_{y \in \overline{B(x_0,r)} - supp(f)} |D^\alpha g(y)| \right) |f(y)|.$$

Comme $g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, $\sup\limits_{y \in \overline{B(x_0,r)} - supp(f)} |D^\alpha g(y)|$ est borné d'où la fonction $y \mapsto f(y)D^\alpha g(x-y)$ est dominée par une fonction intégrable dépendant pas de x. Ainsi d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral
$D^\alpha(f * g)(x) = D^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\, dy \right) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)d^\alpha g(x-y)\, dy = f * D^\alpha g(x)$

3.2.17 Théorème

Soit $\{\psi_k\}_{k\geq 1}$ une approximation de l'identité de classe C^∞ (voir 3.1.10 pour la construction).

Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, on pose $f_k := \psi_k * f$. Alors $f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et converge uniformément vers f.
Soit $p \in [1, +\infty]$, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, f_k converge vers f dans L^p.

Démonstration: D'après le théorème précédent $f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Comme $supp(\psi_k) = \overline{B(0,\frac{1}{k})}$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(x)\,dx = 1$ on aura

$$|f_k(x) - f(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))\psi_k(y)\,dy\right| = \left|\int_{\overline{B(0,\frac{1}{k})}} (f(x-y) - f(x))\psi_k(y)\,dy\right|$$
$$\leq \sup_{|z_1 - z_2| \leq \frac{1}{k}} |f(z_1) - f(z_2)| \to 0$$

lorsque $k \to +\infty$ d'où $\lim_{k\to+\infty} \|f_k - f\|_\infty = 0$.

Pour le deuxième point, en utilise la densité de $C_c(\mathbb{R}^n)$ dans L^p. (voir 3.1.12) ■

3.3 Annexe

3.3.1 Dualité

Soit $p \in [1, +\infty[$ et q son exposant conjugué, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

Soit $g \in L^q(X)$, alors l'inégalité de Hölder, $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q$, permet de définir une forme linéaire $l_g : L^p(X) \to \mathbb{C}$ par $l_g(f) := \int_X fg\,d\mu$.

3.3.1 THÉORÈME

Soit $1 \leq p < +\infty$, et q son exposant conjugué i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors l'application $\phi : L^q(X) \to (L^p(X))'$ telle que $g \mapsto \phi(g) := l_g$ est une application unitaire, ainsi le dual topologique de $L^p(X)$, $(L^p(X))'$, est identifié à $L^q(X)$.

Démonstration: On va commencer par montrer que ϕ est une isométrie. Soit $g \in L^q(X)$ d'après l'inégalité de Hölder on a $\|\phi(g)(f)\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q$ pour tout $f \in L^p(X)$; d'où $\|\phi(g)\| \leq \|g\|_q$.

Pour l'inégalité inverse, on va considérer le cas $1 < p < +\infty$, puis le cas $p = 1$.

Soit $1 < p < +\infty$. Si $\|g\|_q = 0$, alors $g = 0$ p.p. et donc $\phi(g)$ est la forme nulle.

Si $\|g\|_q \neq 0$, on pose $f_0 = sgn(g).|g|^{q-1}$ où la fonction "signe de g", est définie par

$$sng(g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } g(x) = 0 \\ \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|} & \text{si } g(x) \neq 0 \end{cases}$$

Alors, $|f_0|^p = |g|^{p(q-1)} = |g|^q$, d'où $\|f_0\|_p = \|g\|_q^{\frac{q}{p}}$. Ainsi, $f_0 \in L^p(X)$ et $\|f_0\|_p > 0$.

On en déduit, $\|\phi(g)\| = \sup\limits_{f\neq 0} \dfrac{|\phi(g)(f)|}{\|f\|_p} \geq \dfrac{|\phi(g)(f_0)|}{\|f_0\|_p} = \dfrac{|\int_X f_0 g\,d\mu|}{\|f_0\|_p} = \dfrac{\left|\int_{g\neq 0} |g|^q\,d\mu\right|}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}}$

d'où $\|\phi(g)\| \geq \dfrac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}} = \|g\|_q$.

Maintenant on va traiter le cas $p = 1$. Soit $g \in L^\infty(X)$. Si $\|g\|_\infty = 0$ il est clair que $\phi(g) = 0$. Supposons que $\|g\|_\infty > 0$, alors pour tout $0 < \epsilon < \|g\|_\infty$, on pose $X_\epsilon = \{x \in X \,|\, \|g\|_\infty - \epsilon \leq |g(x)| \leq \|g\|_\infty\}$.

Par définition du supremum essentiel $\mu(X_\epsilon) > 0$, il existe alors $Y_\epsilon \subset X_\epsilon$ tel que $0 < \mu(Y_\epsilon) < +\infty$. On pose $f_\epsilon = \dfrac{\mathbb{1}_{Y_\epsilon}}{\mu(Y_\epsilon)} sng(g)$. Alors, $\|f_\epsilon\|_1 = 1$ et

$$\|\phi(g)\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|\phi(g)(f)|}{\|f\|_1} \geq \frac{|\phi(g)(f_\epsilon)|}{\|f_\epsilon\|_1} = \left| \int_X f_\epsilon g \, d\mu \right| = \frac{1}{\mu(Y_\epsilon)} \int_{Y_\epsilon} |g| \, d\mu \geq \|g\|_\infty - \epsilon.$$

En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient $\|\phi(g)\| \geq \|g\|_\infty$. On a ainsi montrer, que si $1 \leq p < +\infty$, l'application ϕ est une isométrie, donc injective, il reste à montrer qu'elle est surjective.

Ceci est une conséquence, d'un résultat sur la théorie de la mesure à valeurs complexes, connu sous le nom du Théorème de Radon-Nikodym.

3.3.3 Théorème (Radon-Nykodym)

Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré et soit ν une mesure à valeurs complexes, qui est absolument continue par rapport à μ i.e. si pour $A \in \Sigma$, $\mu(A) = 0$ entraîne $\nu(A) = 0$. Alors il existe une unique fonction $f \in L^1(X, \mu)$ telle que pour tout $A \in \Sigma$ on a :

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

3.3.4 Remarque

En général, $(L^\infty)'$ contient strictement L^1, car L^∞ n'est pas séparable.