Chapitre 1

Espaces de Hilbert

Dans ce chapitre tous les espaces vectoriels sont sur le corps des complexes $\mathbb{C}$ ou réels $\mathbb{R}$. Pour $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, $\bar{\lambda} = a - ib$ désigne son conjugué.

1.0.1 Définition

Un espace préhilbertien est la donnée d'un espace vectoriel H sur le corps $\mathbb{K}$ (des nombres complexes $\mathbb{C}$ ou réels $\mathbb{R}$) et d'une application application de $H \times H \to \mathbb{K}$, $(x, y) \to \langle x, y \rangle$, appelée produit scalaire, vérifiant les propriétés suivantes :

(I1) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$. (le produit est Hermitien)

(I2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ pour tout $x, y, z \in H$.

(I3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ pour tout $x, y \in H$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

(I4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$.

(I5) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

1.0.2 Remarque

1. Une application qui vérifie les conditions (I2) et (I3) est appelée forme sesquilinéaire.
2. Une application qui vérifie les conditions (I1), (I2) et (I3) est appelée forme hermitienne.
3. Si de plus elle vérifie (I4) est on dit que c'est une forme hermitienne positive.
4. Si elle vérifie (I1), (I2), (I3), (I4) et (I5) on dit que c'est une forme hermitienne positive et non-dégénérée ou tout simplement un produit scalaire.
5. L'application de H dans $\mathbb{R}_+$ définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, est appelée la norme induite (du produit scalaire). On va montrer que c'est bien une norme.

On notera que $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$, on dit que le produit scalaire est sur un espace vectoriel complexe est linéaire par rapport à la première variable et anti-linéaire par rapport à la seconde variable. Sur $\mathbb{R}$, on a la symétrie $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, et $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est appelé espace préhilbertien réel.

1.0.3 EXEMPLE. *L'espace $\mathbb{R}^n$ est un espace préhilbertien réel, où le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est défini par*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k, \tag{1.1}$$

pour tout $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n), y = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$. Le produit scalaire défini par(1.1) est appelé produit scalaire stetard sur $\mathbb{R}^n$.

1.0.4 EXEMPLE. *L'espace $\mathbb{C}^n$ est un espace préhilbertien où le produit scalaire est défini par*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_k, \tag{1.2}$$

pour tout $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n), y = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \in \mathbb{C}^n$. Le produit scalaire défini par (1.2) est le produit scalaire stetard sur $\mathbb{C}^n$.

1.0.5 EXEMPLE. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne, i.e. $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Alors l'application f_A de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f_A(x, y) = \langle Ax, y \rangle$ est une forme hermitienne.

- f_A est positive si et seulement si les valeurs propres de A sont positives.
- f_A est un produit scalaire si et seulement si les valeurs propres de A sont strictement positives.

1.0.6 EXEMPLE. Soit $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \{x = \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}} : \xi_k \in \mathbb{C}, \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty\}$.

D'après l'inégalité $|\xi_k \overline{\eta}_k| \leq |\xi_k|^2 + |\overline{\eta}_k|^2$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \overline{\eta}_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\overline{\eta}_k|^2$$

pour tout $x = \{\xi_k\}, y = \{\eta_k\} \in \ell^2(\mathbb{N})$, on en déduit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_k$ converge absolument. Ceci nous permet de définir

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_k,$$

il est facile de voir que $\langle x, y \rangle$ est un produit scalaire, qu'on appelera le produit scalaire stetard de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Ainsi $\ell^2(\mathbb{N})$ est un espace préhilbertien .

La norme induite par ce produit scalaire est $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right)^{1/2}$.

1.0.7 EXEMPLE. L'espace de Lebesgue $L^2([a, b])$ des classes d'équivalences de fonctions mesurables $x : [a, b] \to \mathbb{C}$, pour la relation d'équivalence définie d'égalité presque

partout, et telle que $\int_a^b |x(t)|^2\,dt < \infty$, est un espace préhilbertien, muni du produit scalaire
$$(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt.$$

D'après l'inégalité $|x(t)\,\overline{y(t)}| \leq |x(t)|^2 + |\overline{y(t)}|^2$

$$\int_a^b |x(t)\,\overline{y(t)}|\,dt \leq \int_a^b |x(t)|^2\,dt + \int_a^b |\overline{y(t)}|^2\,dt < \infty$$

pour tout $x, y \in L^2([a, b])$, on peut alors définir

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt,$$

il est alors facile de vérifier que $\langle x, y\rangle$ est un produit scalaire, qu'on appelera produit scalaire stetard de $L^2([a, b])$. Ainsi $L^2([a, b])$ est un espace préhilbertien . Ce produit scalaire induit la norme $\|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$.

Deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien H sont dit **orthogonaux** si $\langle x, y\rangle = 0$, on note ceci par $x \perp y$.

Pour deux vecters orthogonaux x et y on a (Théorème de Pythagore) :
$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Soit $y \in H$ un vecteur unitaire ($\|y\| = 1$), la projection de $x \in H$ le long de y est donnée par $x_\parallel = \langle x, y\rangle y$ et on pose $x_\perp = x - x_\parallel$.

Alors, $x_\perp$ est orthogonal à $x_\parallel$, car

$$\langle x_\perp, x_\parallel\rangle = \langle x - \langle x, y\rangle y, \langle x, y\rangle y\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}\langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle}\langle y, y\rangle = 0$$

Ainsi d'après le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|x_\parallel + x_\perp\|^2 = \|x_\parallel\|^2 + \|x_\perp\|^2 = |\langle x, y\rangle|^2 + \|x_\perp\|^2$$

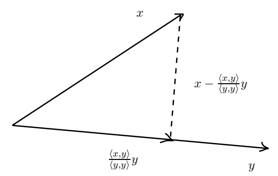
d'où on a $\|x\| \geq |\langle x, y\rangle|$. Comme conséquence on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

1.0.8 Théorème (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit H un espace préhilbertien. Alors pour tout $x, y \in H$ on a :

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$$

Démonstration: Si $y = 0$ l'inégalité est évidente. Sinon, on pose $z = \frac{y}{\|y\|}$ et de ce qui précède on aura $\|x\| \geq |\langle x, z\rangle| = \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|}$. ■



1.0.10 REMARQUE

La différence entre un espace préhilbertien réel et complexe est dans la conjugaison (I1) de la définition 1.0.1. Mise à part la présence de nombre complexe conjugés, la plupart des résultats et démonstrations sont valables pour les réels et les complexes.

Nous considérerons, sauf mention contraire, que les espaces vectoriels sont complexes, en sous-entendant que la partie imaginaire doit être ignorée si l'espace est réel.

1.0.11 PROPOSITION

Tout sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien est un espace préhilbertien

Démonstration: Il suffit de voir que les propriétés (I1)-(I5) sont encore satisfaites par la restriction du produit scalaire à un sous-espace vectoriel. ■

1.0.13 THÉORÈME

Soit H un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$, et $x, y \in H$. Alors

(1) si $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ ou $\langle z, x\rangle = \langle z, y\rangle$ pour tout $z \in H$, alors $x = y$;

(2) la fonction $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}_+$ définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, est une norme sur H.

Proof : (1) D'après la définition 1.0.1,

$$0 = \langle x, z\rangle - \langle y, z\rangle = \langle x, z\rangle + (-1)\langle y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle -y, z\rangle = \langle x - y, z\rangle$$

pour tout $z \in H$, en particulier pour $z = x - y$, d'où $\langle x - y, x - y\rangle = 0$. Il résulte de (I1) que $x - y = 0$. De même $\langle z, x\rangle = \langle z, y\rangle$ $(\forall\, z \in H) \Longrightarrow x = y$.

(2) On va vérifier les axiomes d'une norme, d'après les propriétés du produit scalaire on a :

1° $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0$, et $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

2° $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2\langle x, x\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha|\|x\|$;

3° Comme

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\mathfrak{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \quad \text{(d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (2))} \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2,
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité triangulaire. ■

1.0.14 Remarque

La norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ définie dans le théorème précédent sur le préhilbertien H est appelé norme induite par le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Le théorème montre que tout espace préhilbertien peut être considéré comme un espace vectoriel normé. Dorénavant les propriétés topologiques d'un espace préhilbertien sont entendues pour la norme associée.

Les espaces préhilbertiens sont des espaces vectoriels normés particuliers. Comme tout espace préhilbertien est un espace vectoriel normé, il est natural de se demeter sous quelles conditions un espace normé est un espace préhilbertien, c-à-d sa norme est induite par un produit scalaire. Le résultat suivant nous donne une condition nécessaire.

1.0.15 Lemme

Soit H un espace préhilbertien muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. alors pour tout $x, y \in H$ on a :

(a) *(l'identité du parallélogramme)*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2);$$

(b) *(l'identité de polarisation)* Si H est réel alors

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right);$$

(c) *(l'identité de polarisation)* Si H est complexe alors

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2.$$

Démonstration: Comme,

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \tag{1.3}$$

et

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \|y\|^2, \tag{1.4}$$

d'où l'identité (a) par (1.3) + (1.4). i.e. dans le parallélogramme formé par les vecteurs x et y, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

D'autre part, (1.3) $-$ (1.4) $\Longrightarrow$

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2(\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle), \tag{1.5}$$

Alors si E est réel, on a (b). Si E est complexe, en remplçant y dans (1.5) par iy, on aura

$$\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 = 2(\langle x, iy\rangle + \langle iy, x\rangle). \tag{1.6}$$

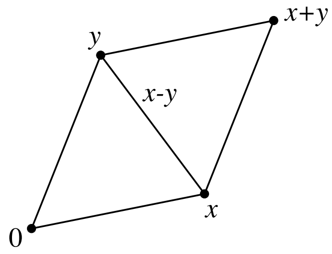


FIGURE 1.1 – l'identité du parallélogramme

finalement, (1.5) et (1.6) entraîne

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= \frac{1}{2}(\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle)\\ &= \frac{1}{2}(\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + i\langle x,iy\rangle + i\langle iy,x\rangle)\\ &= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2),\end{aligned}$$

d'où (c). ■

1.0.17 THÉORÈME (VON NEUMANN)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
E est un espace préhilbertien si et seulement si sa norme vérifie l'identité du parallélogramme 1.0.15

Démonstration: (voir la feuille de TD1) .

1.0.19 EXEMPLE. Soit $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \; : \; z_i \in \mathbb{C}\}$ l'espace vectoriel complexe de dimension n, muni de la norme

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |z_i|.$$

Montrer que cette norme, n'est pas issue d'un produit scalaire.

Démonstration: Si $\|\cdot\|_1$ est issue d'un produit scalaire, alors l'identité du parallélogramme, doit être vérifiée, pour tout $x, y \in \mathbb{C}^n$. Soit H tel que $x_1 = 1$ et les autres coordonnées sont nulles. Soit y tel que $y_2 = 1$ et et les autres coordonnées sont nulles . Alors

$$\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1,$$

et

$$\|x+y\|_1 = \|x-y\|_1 = 2.$$

Comme $8 \neq 4$ l'identité du parallélogramme n'est pas satisfaite. ■

1.0.21 EXEMPLE. Soient $a < b$ des réels. On munit l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$, $C([a,b])$, de sa norme stetard $\|.\|_\infty$, de la convergence uniforme, définie par $\|x\|_\infty = \max_{a\leq t\leq b} |x(t)|$.

La norme $\|.\|_\infty$ sur $C([a.b])$ n'est pas induite par un produit scalaire.

En effet, on considère les fonctions $x, y \in C([a,b])$ définies par $x(t) = 1$, $y(t) = \frac{t-a}{b-a}$, $t \in [a,b]$. Alors

$$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$$

et

$$\|x+y\|_\infty = \max_{a\leq t\leq b}\left|1+\frac{t-a}{b-a}\right| = 2$$
$$\|x-y\|_\infty = \max_{a\leq t\leq b}\left|1-\frac{t-a}{b-a}\right| = 1,$$

Alors $\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 \neq 2(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2)$, donc l'identité du parallélogramme n'est pas satisfaite et par suite la norme ne peut être induite par un produit scalaire.

1.0.22 EXEMPLE. *The space $\ell^p(\mathbb{N})$ ($p \geq 1, p \neq 2$) n'est pas un espace préhilbertien, où $\ell^p(\mathbb{N}) = \{x = \{\xi_k\} : \xi_k \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty\}$ muni de la norme $\|x\|_p = (\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p)^{1/p}$ pour tout $x = \{x_k\} \in \ell^p$.*

En effet, on prend $x = (1,1,0,0,\cdots) \in \ell^p$, $y = (1,-1,0,0,\cdots) \in \ell^p$ et on calcule

$$\|x\|_p = \|y\|_p = 2^{1/p}, \qquad \|x+y\|_p = \|x-y\|_p = 2.$$

Donc l'identité du parallélogramme n'est pas satisfaite, par suite ℓ^p n'est pas un espace. Qu'en est-il de $L^p([0,1]) = \{x : [0,1] \to \mathbb{K} : \int_0^1 |x(t)|^p\, dt < \infty\}$?

1.0.23 EXEMPLE. Montrer que l'inégalité du parallélogramme n'est pas vérifiée pour $L^1([0,1])$ ce n'est donc pas un espace de préhilbertien.

Démonstration: Soit $f = \chi_{[0,1/2]}$ et $g = \chi_{[1/2,1]}$. Alors $\|f\|_1 = \|g\|_1 = \frac{1}{2}$, et $\|f+g\|_1 = \|f-g\|_1 = 1$. Mais

$$1^2 + 1^2 = 2 \neq 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Comme la norme est une fonction continue, le produit scalaire est alors aussi une fonction continue de l'espace produit $H \times H$.

1.0.25 THÉORÈME

Soit H un espace préhilbertien , $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ deux suites de H qui convergent respectivement, vers $x \in H$ et $y \in H$. Alors $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$ quet $n \to \infty$.

Démonstration: D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &\le |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &= |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n = y\rangle| \\ &\le \|x_n - x\| \, \|y_n\| + \|x\| \, \|y_n - y\|.\end{aligned}$$

Comme $\{y_n\}$ est convergente, $\{\|y_n\|\}$ est bornée. D'où $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$ quet $n \to \infty$.

On peut aussi, en utilisant l'identité de polarisation, voir que le produit scalaire est une fonction continue car il s'écrit comme une somme finie de normes. ∎

Les espace préhilbertiens les plus importants sont ceux qui sont complets (en tant qu'espaces métriques), ces espaces sont appelés des espaces de Hilbert.

1.0.27 DÉFINITION
Un espace préhilbertien H est un **espace de Hilbert** s'il est complet par rapport à la distance induite.

1.0.28 EXEMPLE. *Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces de Hilbert.*
Plus généralement, tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.

1.0.29 EXEMPLE. *L'espace de suites $\ell^2(\mathbb{N}) = \{x = \{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}} : \xi_k \in \mathbb{C}, , \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty\}$ est un espace de Hilbert.*

Soit $x^n = (x_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\ell^2(\mathbb{N})$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors un entier $N(\varepsilon) > 0$ tel que pour $m, p \ge N(\varepsilon)$ on ait $\|x_k^m - x_k^p\|_2 \le \varepsilon$, i.e.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k^m - x_k^p|^2 \le \varepsilon^2 \tag{1.7}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $m, p \ge N(\varepsilon)$, $|x_k^m - x_k^p| \le \varepsilon$, ce qui veut dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(x_k^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, par la complétude de $\mathbb{C}$, elle converge vers un point $x_k \in \mathbb{C}$.

On pose $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. D'après 1.7, pour tout $M \in \mathbb{N}$ et $m, p \ge N(\varepsilon)$, on a

$$\sum_{k=0}^{M} |x_k^m - x_k^p|^2 \le \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k^m - x_k^p|^2 \le \varepsilon^2$$

En passant à la limite lorsque $m \to +\infty$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{M} |x_k - x_k^p|^2 = \sum_{k=0}^{M} \lim_{m\to+\infty} |x_k^m - x_k^p|^2 = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{M} |x_k^m - x_k^p|^2 \le \varepsilon^2$$

et finalement en faisant tendre M vers $+\infty$ on obtient : pour tout $p \geq N(\varepsilon)$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k - x_k^p|^2 \leq \varepsilon^2$$

i.e. $\|x - x^p\|_2 \leq \varepsilon$ *d'où* $x - x^p \in \ell^2(\mathbb{N})$
Comme $\epsilon > 0$ *est arbitraire, on aura* $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = x$.
En conclusion, on a $\begin{cases} x = x^{N(\varepsilon)} + (x - x^{N(\varepsilon)}) \in \ell^2(\mathbb{N}) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} x^n = x \end{cases}$.

1.0.30 Exemple. *L'espace $L^2([a,b])$ est un espace de Hilbert.*

1.0.31 Exemple. *Soit $C([-1,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour tout $x, y \in H$, on pose*

$$\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)\,\overline{y(t)}\,dt,$$

Alors $\langle x, y\rangle$ est un produit scalaire, de norme induite $\|x\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$. H est un espace préhilbertien mais pas un espace de Hilbert.

1.0.32 Exercice Trouver une suite de cauchy de $C([-1,1])$ pour la norme $\|.\|_2$ qui ne converge pas.

1.0.33 Définition
Soit $(E, \|.\|_E$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Une application $\Phi : E \to F$ est une **isométrie** si : pour tout $x, y \in E$ on a

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_F = \|x - y\|_E.$$

1.0.34 Remarque
Si Φ est de plus linéaire, la condition précédente est équivalente à, pour tout $x \in E$, $\|\Phi(x)\|_F = \|x\|_E$.

1.0.35 Définition
Soit $(H_1, \langle,\rangle_1$ et $(H_2, \langle,\rangle_2)$ deux espaces préhilbertiens.

1. Une application linéaire $\Phi : H_1 \to H_2$ est une **isométrie** si : pour tout $x \in H_1$, $\|\Phi(x)\|_2 = \|x\|_1$.
2. L'application est dite **unitaire** si elle est en plus bijective.

1.0.36 Exercice Montrer qu'une application linéaire $\Phi : H_1 \to H_2$ entre espaces préhilbertiens est une isométrie si et seulement si pour tout $x, y \in H_1$ on a

$$\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_2 = \langle x - y \rangle_1.$$

Tout espace préhilbertien peut être plongé dans un espace de Hilbert par complétion.

1.0.37 THÉORÈME
Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien.

Il existe un espace de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle , \rangle)$ et une isométrie linéaire $\Phi : H \to \mathcal{H}$ tels que $\Phi(H)$ soit dense dans $\mathcal{H}$.

On dit que $\mathcal{H}$ est un complété de H. Ce complété est unique à isomorphisme isométrique près.

Démonstration: C'est une conséquence des théorèmes de complétion d'un espace métrique et de l'unicité du prolongement des applications uniformément continues (voir cours de topologie). ∎

1.1 Orthogonalité

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour des espaces réels, si x, y sont tous les deux non nuls, alors

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|} \leq 1,$$

et donc l'angle entre x et y peut être défini

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}\right).$$

Pour les espaces complexes, le problème est plus difficile, comme le produit scalaire $\langle x, y \rangle$ est à valeurs complexes il n'est pas clair ce que "angle" signifie dans ce cas. Néanmoins, un cas particulier, très important, peut être considéré, à savoir le cas $\langle x, y \rangle = 0$.

1.1.1 DÉFINITION
Soit H un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Deux vecteurs $x, y \in H$ sont dit orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$, et qu'on note $x \perp y$.

On va généraliser cette notion, à des ensembles.

1.1.2 DÉFINITION

Soit H un préhilbertien et soit A un sous-ensemble de H. un vecteur $x \in H$ et l'ensemblet A sont dit orthogonaux dans H si x est orthogonal à tout vecteur de A, qu'on note $x \perp A$. Le complémentaire orthogonal de A est l'ensemble

$$A^{\perp} = \{x \in H : x \perp A\}(= \{x \in H : x \perp a \,\forall\, a \in A\} = \{x \in H : \langle x, a\rangle = 0 \,\forall\, a \in A\}),$$

i.e. l'ensemble $A^{\perp}$ formé des vecteurs de H qui sont orthogonaux à tout vecteur de A (Si $A = \emptyset$ then $A^{\perp} = H$).

Soient M et N deux sous-ensembles de H. M et N sont orthogonaux si pour tout $x \in M, y \in N$, $x \perp y$, et qu'on note $M \perp N$.

1.1.3 EXEMPLE. *Si $E = \mathbb{R}^3$ et $A = \{(a_1, a_2, 0) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$, alors $A^{\perp} = \{(0, 0, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}$.*

1.1.4 LEMME

Si E est un préhilbertien et $A \subset E$ then :

- (a) *(Le théorème de Pythagore)* Pour tout $x, y, z \in E$ avec $z = x + y$ et $x \perp y$, on a $\|z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- (b) $0 \in A^{\perp}$.
- (c) Si $0 \in A$ alors $A \cap A^{\perp} = \{0\}$, autrement $A \cap A^{\perp} = \emptyset$.
- (d) $\{0\}^{\perp} = X$, $E^{\perp} = \{0\}$.
- (e) Si A contient une boule ouverte $B(a, r)$ pour un certain $a \in E$ et $r > 0$, alors $A^{\perp} = \{0\}$; en particulier, si A est un ouvert non vide alors $A^{\perp} = \{0\}$.
- (f) Si A est dense dans E, i.e. $\bar{A} = X$, alors $A^{\perp} = \{0\}$.
- (g) Si $B \subset A$, alors $A^{\perp} \subset B^{\perp}$.
- (h) $A^{\perp}$ est un sous-espace fermé de E.
- (i) $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.

Démonstration: (a) Comme $\|z\|^2 = \|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ car $x \perp y$ (i.e. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = 0$).

(b) Comme $\langle 0, a\rangle = 0$ pour tout $a \in A$, on a $0 \in A^{\perp}$.

(c) D'après (b), $\{0\} \subset A \cap A^{\perp}$. On suppose que $x \in A \cap A^{\perp}$. Alors $\langle x, x\rangle = 0$ et donc $x = 0$ d'après la définition du produit scalaire.

(d) Si $A = \{0\}$, $x \in E$ on a $\langle x, a\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$ pour tout $a \in A$, d'où $x \in A^{\perp}$ et par suite $A^{\perp} = E$. Si $A = E$ et $x \in A^{\perp}$ alors $\langle x, a\rangle = 0$ pour tout $a \in X$. En particulier, en posant $a = x$ donne $\langle x, x\rangle = 0$, qui entraîne que $x = 0$, donc $X^{\perp} \subset \{0\}$ et $X^{\perp} = \{0\}$.

(e) Soit $x \in A^{\perp}$. Si $x = 0$ il n'y arien à faire. Si $x \neq 0$, on note que $A \supset B(a, r)$, alors $a \in A$ qui donne $\langle x, a\rangle = 0$. Mais on a aussi $a + \frac{rx}{2\|x\|} \in B(a, r) \subset A$, on doit donc avoir

$$0 = \left\langle x, a + \frac{rx}{2\|x\|} \right\rangle = \langle x, a\rangle + \frac{r}{2\|x\|}\langle x, x\rangle,$$

qui entraîne $r = 0$, qui est contradictoire. Ainsi $A^{\perp} = \{0\}$.

(f) Supposons que $x \in A^{\perp}$. Comme $\bar{A} = X$, il s'ensuit qu'il existe une suite $\{x_n\}$ de A telle que $x_n \to x$ as $n \to \infty$. Notons que $\langle x, x_n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où, par continuité du produit scalaire (cf. Theorem 1.0.25),

$$\langle x, x \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, x_n \rangle = 0,$$

et alors, $x = 0$.

(g) Soit $x \in B^{\perp}$ et $a \in A$. Alors $a \in B$ (car $A \subset B$), d'où $\langle x, a \rangle = 0$ pour tout $a \in A$, on aurra $x \in A^{\perp}$, donc $B^{\perp} \subset A^{\perp}$. Si $B \subset A$, alors $A^{\perp} \subset B^{\perp}$.

(h) Soit $x, y \in A^{\perp}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors

$$\langle \alpha x + \beta y, a \rangle = \alpha \langle x, a \rangle + \beta \langle y, a \rangle = 0,$$

et $\alpha x + \beta y \in A^{\perp}$, et donc $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E. Soit $\{x_n\}$ une suite de $A^{\perp}$ telle que
$\{x_n\}$ converge vers $x \in E$. La continuité nous donne

$$\langle x, a \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, a \rangle = 0.$$

pour tout $a \in A$. Ainsi $x \in A^{\perp}$ et $A^{\perp}$ est fermé.

(i) Soit $a \in A$. Pour tout $x \in A^{\perp}$, $\langle a, x \rangle = \overline{\langle x, a \rangle} = 0$, d'où $a \in (A^{\perp})^{\perp}$ c-à-d $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$. ■

1.1.6 Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel d'un préhilbertien E. Alors $x \in F^{\perp}$ si et seulement si $\|x - y\| \geq \|x\|$ pour tout $y \in F$.

Démonstration: ($\Rightarrow$) Soit $x \in F^{\perp}$, pour tout $y \in F$, $x \perp y$, et $x \perp (-y)$. D'après (a) du Lemme 1.1.4,

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|(-1)y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|x\|^2.$$

($\Leftarrow$) Supposons que $\|x - y\|^2 \geq \|x\|^2$ pour tout $y \in F$. Soit $y \in F$. Si $y = 0$ alors $\langle x, y \rangle = 0$. Si $y \neq 0$, alors $\alpha y \in F$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ car F est un sous-espace vectoriel. Ainsi

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &\leq \|x - \alpha y\|^2 \\ &= \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle \\ &= \|x\|^2 + |\alpha|^2 \|y\|^2 - \alpha \overline{\langle x, y \rangle} - \overline{\alpha} \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

En posant $\alpha = \langle x, y \rangle / \|y\|^2$ dans l'inégalité, on aura

$$\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \geq 0,$$

qui donne $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout $y \in E \backslash \{0\}$, alors pour tout $y \in F$. D'où $x \in F^{\perp}$. ■

1.2 Systèmes orthonormés

1.2.1 DÉFINITION
Un système $\{x_i\}_{i\in I}$ de vecteurs d'un espace vectoriel H sur $\mathbb{K}$ est un **système libre** si pour toute partie finie $J \subset I$ la combinaison linéaire finie
$\sum_{j\in J} \lambda_j x_j = 0$ si et seulement si $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in J$.
En d'autres termes, le vecteur nul 0 a une écriture unique dans

$$\mathrm{vect}\{\{x_i\}_{i\in I}\} := \left\{ \sum_{j\in J} \lambda_j x_j \mid \text{ pour toute partie finie } J \subset I \text{ et } \lambda_j \in \mathbb{K} \right\}.$$

1.2.2 DÉFINITION
Un système $\{x_i\}_{i\in I}$ de vecteurs d'un espace préhilbertien H sur $\mathbb{K}$ est un **système orthogonal** si, $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ pour $i, j \in I$ tels que $i \neq j$; en d'autres termes, le système est constitué de vecteurs de H orthogonaux deux à deux.

1.2.3 DÉFINITION
Un système orthogonal $\{x_i\}_{i\in I}$ de vecteurs d'un préhilbertien H est un **système orthonormé** si $\|x_i\| = 1$ pour tout $i \in I$.

1.2.4 REMARQUE
Dans le cas particulier où $I = \mathbb{N}$ (ou dénombrable), un système orthonormé (respectivement orthogonal) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est appelé parfois suite orthonormée (resp. orthogonale).

1.2.5 EXEMPLE. *Dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) muni du produit scalaire standard le système $\{e_1, \cdots, e_n\}$, donné par*

$$e_1 = (1, 0 \cdots, 0), e_2 = (0, 1, 0 \cdots, 0), \ldots, e_k = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{k-1}, 1, 0, \cdots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 1)$$

est une suite orthonormaée.

1.2.6 EXEMPLE. *L'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$, muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k}$, le système $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donné par*

$$e_n = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1}, 1, 0, \cdots) \quad \textit{for every} n \in \mathbb{N},$$

$e_n = (\delta_{k,n})_{k\in\mathbb{N}^*}$ *où* $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\, i = j \\ 0 & si\, i \neq j \end{cases}$ *(le symbole de Kronecker), est une suite orthonormée.*

1.2.7 EXEMPLE. *L'espace de Hilbert $L^2[-\pi,\pi]$ muni du produit scalaire $\langle x,y\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\overline{y(t)}\,dt$, le système $\{e_n\}$, pour $n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$, où la fonction $e_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ est définie par*

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \quad \textit{pour tout} \;\; t \in [-\pi,\pi].$$

Alors pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$, on a

$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\,dt = \begin{cases} 1 & \textit{si } n = m \\ 0 & \textit{si } n \neq m. \end{cases}$$

Ainsi $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite orthonormée, appelée suite trigonométrique.

On considère $\{f_0, f_1, g_1, f_2, g_2, \cdots\}$, où la fonction $f_0 : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ est définie par

$$f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \textit{pour tout } t \in [-\pi, \pi,],$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $f_n, g_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ sont définie par

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt \quad \textit{et} \quad g_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt \quad \textit{pour tout } t \in [-\pi,\pi].$$

on montre aussi que $\{f_0, f_1, g_1, f_2, g_2, \cdots\}$ est une suite orthonormée appelée suite trigonométrique réelle.

Ces fonctions seront considérées plus en détails au chapitre sur les séries de Fourier.

1.2.8 LEMME (IDENTITÉ DE PYTHAGORE ET INÉGALITÉ DE BESSEL)
Soit H un espace préhilbertien .

(i) Soit $\{x_1, \ldots, x_N\}$ un système de vecteurs orthogonaux alors on **l'identité de Pythagore** suivante :

$$\|x_1 + \ldots + x_N\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_N\|^2$$

(ii) Soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée de H, on a alors :

(a) $\begin{cases} \forall x \in H \\ \forall N \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=0}^{N} |\langle x, e_k\rangle|^2 + \|x - \sum_{k=0}^{N}\langle x, e_k\rangle e_k\|^2$

(b) **l'inégalité de Bessel**

$$\sum_{n\geq 0} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Démonstration: (i) Par récurrence à partir de l'identité de Pythagore pour 2 vecteurs.

(ii) (a) On écrit $x_\parallel = \sum_{k=0}^{N}\langle x, e_k\rangle e_k$ et $x_\perp = x - \sum_{k=0}^{N}\langle x, e_k\rangle e_k$.

Alors, $x_\parallel \perp x_\perp$ et comme $x = x_\parallel + x_\perp$ on aura d'après l'identité de Pythagore $\|x\|^2 = \|x_\parallel\|^2 + \|x_\perp\|^2$.

(b) D'après (a), pour tout N entier ≥ 1 et en minorant simplement $\|x_\perp\|^2$ par 0 on aura $\sum_{n=0}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$, et par passage à la limite quet $N \to +\infty$ on obtient l'inégalité de Bessel. ■

Une conséquence du lemme précédent est, si on se donne dans un espace préhilbertien H une suite orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, alors pour tout $x \in H$ la série de terme général $(\langle x, e_n\rangle e_n)$ est absolument convergente, et si H est en plus complet alors la série est convergente.

1.2.10 Proposition

Soit H un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée.

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de scalaire.

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ converge dans H si et seulement si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Démonstration: Puisque H est complet la série converge si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.

Pour tout $m, p \in \mathbb{N}$ $p > m$, l'identité de Pythagore nous donne :

$$\| \sum_{n=0}^{p} \alpha_n e_n - \sum_{n=0}^{m} \alpha_n e_n \|^2 = \| \sum_{n=m+1}^{p} \alpha_n e_n \|^2 = \sum_{n=m+1}^{p} |\alpha_n|^2$$

ainsi la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ est convergente si et seulement si la série réelles à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2$ vérifie le critère de Cauchy, donc converge car $\mathbb{R}$ est complet. ■

1.2.12 Remarque

Dans le cas particulier où la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$, l'inégalité de Bessel nous assure de l'appartenance de cette suite à $\ell^2(\mathbb{N})$.

Ainsi, on une application $\Phi : H \to \ell^2(\mathbb{N})$, définie par $\Phi(x) = (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette application est linéaire, car le produit scalaire est linéaire par rapport à x et l'inégalité de Bessel assure la continuité de Cette application :

$$\|\Phi(x)\|_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Finalement, la proposition précédente entraîne sa surjectivité, en effet, pour toute suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ le vecteur $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n \in H$ et vérifie $\Phi(\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n) = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'application sera bijective si on est dans la situation suivante

1.2.13 Définition

Soit H un espace de Hilbert. Une suite orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une **base hilbertienne** si $\begin{cases} \langle x, e_n\rangle = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow x = 0.$

1.2.14 Remarque
Une suite orthonormée est une base hilbertienne si et seulement si l'application Φ de la remarque 1.2.12 est injective.

1.2.15 Théorème
Soit H un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormée.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne

(ii) $\forall x \in H,\ x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle e_n$.

(iii) $\forall x \in H,\ \|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2$. (**l'identité de Parseval**)

Démonstration: 1. $(i) \Rightarrow (ii)$ Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\langle x - \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle e_n, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle = 0$, alors l'hypothèse (i) entraîne $x - \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle e_n = 0$ i.e. $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle e_n$.

2. $(ii) \Rightarrow (iii)$ D'après le (ii)-(a) du lemme 1.2.8, on a pout tout $N \in \mathbb{N}$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{0\leq k\leq N} |\langle x, e_k\rangle|^2 + \|x - \sum\limits_{0\leq k\leq N} \langle x, e_k\rangle e_k\|^2$. Ainsi, lorsque $N \to +\infty$ on obtient l'identité de Parseval.

3. $(iii) \Rightarrow (i)$
Comme par hypothèse on a $\begin{cases} \langle x, e_n\rangle = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$ et l'identité de Parseval, on en déduit que $\|x\|^2 = 0$ i.e. $x = 0$.

1.2.17 Remarque
Si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H, l'identité de Parseval entraîne que $\|\Phi(x)\|_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2$ d'où Φ est une isométrie, donc injective et par la remarque précédente, on obtient ainsi une application unitaire de H dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

1.3 Projection hilbertienne

1.3.1 Définition
Un sous-ensemble C d'un espace vectoriel E est dit convexe si, pour tout $x, y \in C$ aet tout $\lambda \in [0, 1]$, on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.

En d'autre termes, C est convexe si, pour tout $x, y \in C$, le segment dans E joignant x est y est contenu dans C.

1.3.2 Théorème (Projection sur un convexe fermé)

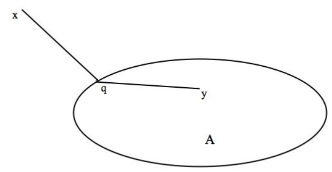
Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé non vide de H.

Alors pour tout $x \in H$, il existe un **unique** $q \in C$, noté $P_C(x)$, tel que

$$\|x - q\| = d(x, C) = \inf_{a \in C} \|x - a\|.$$

De plus, $P_C(x)$ est caractérisé par les propriétés

$$\begin{cases} P_C(x) \in C \\ \mathfrak{Re}\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \leq 0 \quad \forall y \in C \end{cases} \tag{1.8}$$



Cette inégalité traduit le fait que l'angle entre les vecteurs $x - P_C(x)$ et $y - P_C(x)$ est obtus.

Démonstration: Soit $\gamma = \inf\{\|x - a\| : a \in C\}$. Par définition de γ, il existe une suite $\{q_n\}$ de C telle que

$$\gamma_n = \|x - q_n\| \to \gamma \quad (n \to \infty). \tag{1.9}$$

Comme C est convexe, il s'en suit que

$$\frac{q_n + q_m}{2} \in C \quad \text{pour tout } n, m \in \mathbb{N}.$$

D'où

$$\left\| x - \frac{q_n + q_m}{2} \right\| \geq \gamma \quad \text{pour tout } n, m \in \mathbb{N}.$$

L'identité du parallélogramme appliquée à $x - q_n$ et $x - q_m$, nous donne

$$\begin{aligned} \|q_n - q_m\|^2 &= \|(q_n - x) + (x - q_m)\|^2 \\ &= 2\|q_n - x\|^2 + 2\|x - q_m\|^2 - \|(q_n - q_m) - 2x\|^2 \\ &= 2\|q_n - x\|^2 + 2\|x - q_m\|^2 - 4\left\| x - \frac{q_n + q_m}{2} \right\|^2 \\ &\leq 2\gamma_n^2 + 2\gamma_m^2 - 4\gamma^2. \end{aligned} \tag{1.10}$$

■

Ainsi $\{q_n\} \subset C$ est une suite de Cauchy (1.9), et donc converge vers un point $q \in C$ car C est un fermé de H, donc est lui même complet. Par suite $\|x - q\| \geq \gamma$.D'après la continuité de la norme (1.9), on aura $\|x - q\| = \gamma$. Ce qui donne l'existence de q .

Pour l'unicité on suppose qu'un $w \in C$ vérifie $\|x - w\| = \gamma$. Alors $(q + w)/2 \in C$ car C est convexe, et donc $\|x - \frac{1}{2}(q + w)\| \geq \gamma$. L'identité du parallélogramme appliquée à $x - w$ et $x - q$ donne

$$0 \leq \|q - w\| \leq 4\gamma^2 - 4\gamma^2 = 0$$

Alors $w = q$, d'où l'unicité.

Enfin, étant donné $y \in C$, pour tout $\lambda \in]0, 1]$ le vecteur $(1 - \lambda)P_C(x) + \lambda y - x$, de sorte que $0 \leq \|(1 - \lambda)P_C(x) + \lambda y - x\|^2 - \|P_C(x) - x\|^2$
$= \|(P_C(x) - x) + \lambda(y - P_C(x))\|^2 - \|P_C(x) - x\|^2$
$= -2\lambda\mathfrak{Re}\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle + \lambda^2\|y - P_C(x)\|^2$ d'où $\mathfrak{Re}\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \leq \frac{\lambda}{2}\|y - P_C(x)\|^2$.

En faisant tendre λ vers 0^+, on en déduit que $\mathfrak{Re}\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \leq 0$.

Inversement, si $\mathfrak{Re}\langle x - w, y - w\rangle \leq 0$, $\forall y \in C$, pour un certain $w \in C$, alors on obtient $\|(1 - \lambda)w + \lambda y - x\|^2 - \|w - x\|^2 \geq 0$ et en faisant tendre λ vers 1^-, on obtient $\|y - x\|^2 - \|w - x\|^2 \geq 0$, $\forall y \in C$, c-à-d que $w = P_C(x)$.

En particulier si $x = 0$ on a :

1.3.4 Corollaire

Tout ensemble convexe fermé d'un espace de Hilbert a un **unique** élément de norme minimale.

Si F est un sous-espace vectoriel de H, alors F est convexe, d'où

1.3.5 Corollaire (Théorème de la projection hilbertienne)

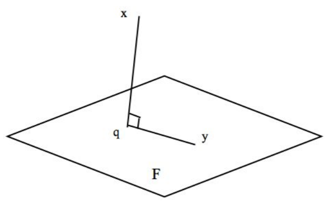
Soit F un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert H et soit $x \in H$.

Alors, il existe un **unique** $q \in F$, noté $P_F x$, tel que

$$\|x - q\| = d(x, F) := \inf_{a \in F} \|x - a\|.$$

De plus, $P_F x$ est caractérisé par les propriétés

$$\begin{cases} P_F x \in V \\ \langle x - P_F x, y\rangle = 0 \quad \forall y \in V \end{cases} \tag{1.11}$$



Démonstration: L'existence de P_F est assuré par le théorème précédent. Il reste à établir la caractérisation.

Soit $x \in H$ et $q = P_F x$. Pour tout $y \in F$, $y + q \in F$ en appliquant la caractérisation du théorème précédent, on a $\mathfrak{Re}\langle x - q, y\rangle = \mathfrak{Re}\langle x - q, (y + q) - q\rangle \leq 0$

En remplaçant y par $-y$, iy et $-iy$ on obtient $\mathfrak{Re}\langle x - q, y\rangle = 0$ pour tout $y \in F$.

Inversement, si $\mathfrak{Re}\langle x - w, y\rangle = 0, \forall y \in F$, pour un certain $w \in V$, alors $\mathfrak{Re}\langle x - w, y - w\rangle = 0$ et $\|(1-\lambda)w + \lambda y - x\|^2 - \|w - x\|^2 \geq 0$ et en faisant tendre λ vers 1^-, on obtient $\|y - x\|^2 - \|w - x\|^2 \geq 0, \forall y \in F$, c-à-d que $w = P_F x$.

La même démonstration est valable si on suppose seulement que H est un espace préhilbertien par contre F doit être un sous-espace complet

1.3.7 COROLLAIRE (THÉORÈME DE LA PROJECTION : LE CAS PRÉHILBERTIEN)
Soit F un sous-espace vectoriel complet de l'espace de préhilbertien H et soit $x \in H$.

Alors, il existe un **unique** $q \in F$, noté $P_F x$, tel que

$$\|x - q\| = d(x, F) := \inf_{a \in F} \|x - a\|.$$

De plus, $P_F x$ est caractérisé par les propriétés

$$\begin{cases} P_F x \in V \\ \langle x - P_F x, y\rangle = 0 \quad \forall y \in V \end{cases} \tag{1.12}$$

Cas particuliers : Soit H un espace préhilbertien.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie n et on suppose fixée une base $\mathcal{B} = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ de F.

Alors pour tout $x \in H$, la caractérisation de la projection de x sur F, 1.11 devient

$$\begin{cases} \text{Trouver } U = \sum_{i=1}^n u_i \phi_i \in F \text{ solution de} \\ AU = B \end{cases} \tag{1.13}$$

où $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $a_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j\rangle$, est la matrice de Gram du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ où $b_j = \langle x, \phi_j\rangle$.

En effet, la caractérisation 1.11 $\langle x - U, y\rangle = 0, \forall y \in F$ est équivalente à : pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\langle u - \sum_{i=1}^n u_i \phi_i, \phi_j\rangle = 0$ i.e. $\sum_{i=1}^n u_i \langle \phi_i, \phi_j\rangle = \langle x, \phi_j\rangle$ qui n'est autre que le système d'équations $AU = B$.

1.3.8 Exercice Montrer que la matrice de Gram est définie positive.

1.3.9 EXEMPLE. Approximation par les moindres carrés.

Soit n nombre réels strictement positifs $p_i > 0, i \in \{1, \ldots, n\}$ fixés appelés "poid-s".

Etant donné un nuage de n points $(x_i, y_i)_{1 \le i \le n}$ de $\mathbb{R}^2$, que l'on désire "ajuster" au mieux par une droite affine par rapport à la norme relativement à aux poids.

On cherche alors à minimiser la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(s,t) = \sum_{i=1}^{n} p_i (y_i - sx_i - t)^2$. On veut alors utiliser le résultat sur les projections hilbertiennes.

Pour cela on prend pour H l'espace des fonction définie sur l'ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, i.e. $H = \{f : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \mathbb{R}\}$, et comme produit scalaire l'application définie par :

$$f, g \in H, \langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) g(x_i)$$

1.3.10 Exercice Montrer que $(H, ß5)$ est un espace de Hilbert

Comme on veut approcher ce nuage de points par des droites affines, on va choisir pour F l'espace vectoriel des droites affines, i.e. $F = \{f \in H | \exists c, d \in \mathbb{R}, f = c\phi_1 + d\phi_0\}$ où $\phi_0(x) = 1$ et $\phi_1(x) = x$ pour tout $x \in \{x_1, \ldots, x_n\}$.

La fonction qui nous intéresse est la fonction $f \in H$ définie par $f(x_i) = y_i$ et sa projection sur F, $P_F f = a\phi_1 + b\phi_0$ est solution du système 1.12.

On est donc ramener à résoudre le système

$$\begin{pmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_0, \phi_1 \rangle \\ \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \langle \phi_0, \phi_0 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, \phi_1 \rangle \\ \langle f, \phi_0 \rangle \end{pmatrix}$$

ce qui revient à

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i & \sum_{i=1}^{n} p_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} p_i y_i x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} p_i y_i \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i & \sum_{i=1}^{n} p_i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} p_i y_i x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} p_i y_i \end{pmatrix}.$$

1.3.11 EXEMPLE. Soit $a < b$ deux réels et $p :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur $[a, b]$. Soit $H = C^0([a, b])$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle := \int_a^b p(x) f(x) g(x)\, dx$ (c'est un espace préhilbertien).

Soit $F_n := \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré $\le n$. F est de dimension $n+1$ et $\{1, x \ldots, x^n\}$ est une base de F .

Alors pour tout $f \in H$, la projection orthogonale $P_F f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, de f sur F est déterminée par le système

$$\begin{pmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle x, 1 \rangle & \cdots & \langle x^n, 1 \rangle \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \langle 1, x^n \rangle & \langle x, x^n \rangle & \cdots & \langle x^n, x^n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, 1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, x^n \rangle \end{pmatrix}.$$

Par exemple si $p \equiv 1$ et $[a, b] = [0, 1]$, la matrice de Gram du produit scalaire dans la base $\{1, x \ldots, x^n\}$ est la matrice $A = (a_{ij})_{0 \le i, j \le n}$ où $a_{ij} = \frac{1}{i+j+1}$ cette matrice est appelée matrice de Hilbert. En analyse numérique, cette matrice est connue pour être “mal conditionnée” Grosso modo cela veut dire, que si l’on perturbe le second membre, l’ordre de l’erreur relative sur la solution du sytème est très grande par rapport à l’erreur relative sur le second membre.

C’est pour cela qu’il est parfois utile de prendre des bases orthogonales ou orthonormées, une fois qu’on les a déterminé, les calculs dans ces bases sont plus faciles.

La section suivante nous explique comment y parvenir.

1.3.1 Procédé d’orthonormalisation de Gram-Schmidt

Etant donnée une suite libre $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d’un espace préhilbertien H on voudrait construire une suite orthonormée $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on ait $\mathrm{vect}\{f_n\}_{1\leq n\leq p} = \mathrm{vect}\{e_n\}_{1\leq n\leq p}$

1.3.12 Théorème
Soit H un espace préhilbertien de dimension infinie.

Soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite libre de vecteurs de H.

On pose pour $p \in \mathbb{N}^*$, $V_p := \mathrm{vect}\{e_n\}_{1\leq n\leq p}$.

Alors, la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par une récurrence :

$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ et pour $p \geq 2$, $f_p = \frac{e_p - P_{V_{p-1}}(e_p)}{\|e_p - P_{V_{p-1}}(e_p)\|}$

est une suite orthonormée telle que $\mathrm{vect}\{f_1,\ldots,f_p\} = V_p$.

En fait, on a pour $p \geq 1$, $f_{p+1} = \dfrac{e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p}\langle e_p, e_i\rangle f_i}{\|e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p}\langle e_p, e_i\rangle f_i\|}$.

Démonstration: On raisonne par récurrence : Comme la suite est libre $e_1 \neq 0$ par suite $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ vérifie bien $\|f_1\| = 1$.

Supposons que $f_1,\ldots,f_p$ sont déjà obtenus et que $V_p = \mathrm{vect}\{f_1,\ldots,f_p\}$.

Soit $P_{V_p}(e_{p+1})$ la projection orthogonale de e_{p+1} sur V_p, d’après la caractérisation de la projection on a

$\langle e_{p+1} - P_{V_p}(e_{p+1}), y\rangle = 0$ pour tout $y \in V_p$, en particulier, $e_{p+1} - P_{V_p}(e_{p+1})$ est orthogonal aux vecteurs $f_1,\ldots,f_p$ et on obtient un système orthonormé $f_1,\ldots,f_p, f_{p+1}$ en posant $f_{p+1} = \frac{e_{p+1} - P_{V_p}(e_{p+1})}{\|e_{p+1} - P_{V_p}(e_{p+1})\|}$.

Il reste à determiner $P_{V_p}(e_{p+1})$ dans la base orthonorme $\{f_1,\ldots,f_p\}$.

Si on écrit $P_{V_p}(e_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i$, alors $\langle P_{V_p}(e_{p+1}), f_i\rangle = \lambda_i$ et d’autre de la caractérisation précédente on a $\langle P_{V_p}(e_{p+1}), f_i\rangle = \langle e_{p+1}, f_i\rangle$, finalement

$P_{V_p}(e_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i = \sum_{i=1}^{p}\langle e_{p+1}, f_i\rangle f_i$.

1.3.14 Exemple. Soit $H = C^0([-1,1])$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 p(x)f(x)g(x)\,dx$ avec $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Alors la suite orthonormée obtenue à partir de la suite des monômes $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ est la suite des polynôme de Tchebychev $P_n = \cos(n\mathrm{Arcos}(x))$, $n \in \mathbb{N}$.

1.4 Somme directe

1.4.1 Définition

Soient W et U deux sous-espace vectoriels d'un espace vectoriel V tels que $W \cap U = \{0\}$ et tout élément $x \in V$ peut s'écrire sous la forme $x = y + z$ pour un certain $y \in W$ et $z \in U$. Dans ce cas on dit que V est la somme directe de W et U, et on écrit $V = W \dot{+} U$. On suppose en plus que V est un espace préhilbertien et $W \perp U$. On dit dans ce cas que V est une somme directe orthogonale de W et U, et on écrit $V = W \oplus U$.

1.4.2 Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H. On a les propriétés suivantes :

1. Tout $x \in H$ a une décomposition unique :
$$x = P_F x + (I - P_F)x$$
avec $P_F x \in V$ et $P_{F^\perp} x = (I - P_F)x \in F^\perp$ i.e. $H = F \oplus F^\perp$.
2. $\|x\|^2 = \|P_F x\|^2 + \|P_{F^\perp} x\|^2$
3. L'application $P_F : H \longrightarrow F$ est linéaire continue et pour tout $x \in H$, $\|P_F x\| \leq \|x\|$.
$\|P_F\| = 1$ si $F \neq \{0\}$.
4. $P_F \circ P_F = P_F$ (i.e. P_F est idempotent)
5. Pour tout $x, y \in H$ on a $\langle P_F x, y\rangle = \langle x, P_F y\rangle$ (i.e. P_F est un opérateur auto-adjoint)
L'application $P_F : H \to F$ est appelée la projection orthogonale de H sur F.

Démonstration:

1. D'après le théorème de la projection hilbertienne, $\forall x \in H$ $\langle x - P_F x, y\rangle = 0$ pour tout $y \in F$, donc $x - P_F x$ est orthogonal à F.
Ainsi $x = P_F x + (x - P_F x) \in F + F^\perp$ d'où $H = F + F^\perp$.
La somme est directe car si $x \in F \cap F^\perp$ alors $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0$, donc $F \cap F^\perp = \{0\}$.
2. Comme $x \in H$ s'écrit $x = P_F x + (x - P_F x)$ avec $P_F x \in F$ et $x - P_F x \in F^\perp$, d'après Pythagore on aura $\|x\|^2 = \|P_F x\|^2 + \|x - P_F x\|^2$
3. On montre que l'application P_F est linéaire en utilisant la caractérisation 1.11 et l'unicité de la projection. Ainsi $P_F x + P_F y$ est le projeté de $x + y$ et par unicité il est égal à $P_F(x + y)$, de même $\lambda P_F x = P_F(\lambda x)$.
D'après $\|x\|^2 = \|P_F x\|^2 + \|x - P_F x\|^2$, on a $\|x\| \geq \|P_F x\|$, d'où P_F est continue et de norme $\|P_F\| \leq 1$.
Si $F \neq \{0\}$, on a pour $x \in F - \{0\}$, $P_F x = x$ d'où $\|P_F x\| = \|x\|$, ce qui entraîne $\|P_F\| \geq 1$. En conclusion, les deux inégalités nous donne $\|P_F\| = 1$.

4. Clairement, pour tout $x \in H$, on a $P_F(P_F x) = P_F x$.
5. Soient $x, y \in H$, d'après la caractérisation 1.11 et $P_F y \in F$ on a
$\langle x - P_F x, P_F y\rangle = 0$ i.e. $\langle x, P_F y\rangle = \langle P_F x, P_F y\rangle$.
De même $\langle P_F x, P_F y\rangle = \overline{\langle P_F y, P_F x\rangle} = \overline{\langle y, P_F x\rangle} = \langle P_F x, y\rangle$.
Ainsi $\langle x, P_F y\rangle = \langle P_F x, y\rangle$. ■

1.4.4 Remarque
Les mêmes propriétés sont valables pour $(I - P_F) = P_{F^\perp}$, où I est l'application identité de H.

Maintenant qu'on a étudier l'orthogonal $F^\perp$ de F, on peut passer à celle de $F^{\perp\perp}$ l'orthogonal de $F^\perp$.

1.4.5 Corollaire
Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H. Alors $F^{\perp\perp} = F$.

Démonstration: D'après (i) du Lemme 1.1.4 on a $F \subset F^{\perp\perp}$. Maintenant on suppose que $x \in F^{\perp\perp}$, alors , il existe un unique $y \in F$ et $z \in F^\perp$ tel que $x = y + z$. Comme $y \in Y$ et $x \in Y^{\perp\perp}$, $0 = \langle y, z\rangle = \langle x, z\rangle$. Alors

$$0 = \langle x, z\rangle = \langle y + z, z\rangle = \langle y, z\rangle + \langle z, z\rangle = \|z\|^2.$$

d'où $z = 0$ et donc $x = y \in F$. Ainsi $F^{\perp\perp} \subset F$, ce qui termine la preuve. ■

Si F n'est pas fermé, le résultat précédent n'est plus vrai car $F^{\perp\perp}$ est toujours fermé. Neanmoins on a :

1.4.7 Corollaire
Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert H. Alors

1. $F^{\perp\perp} = \overline{F}$
2. F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = H$.

Démonstration: Comme $F \subset \overline{F}$, il s'en suit de (g) du Lemme 1.1.4 que $\overline{F}^\perp \subset F^\perp$ et donc $F^{\perp\perp} \subset \overline{F}^{\perp\perp}$. D'après le corollaire précédent, $\overline{F}^{\perp\perp} = \overline{F}$, et donc $F^{\perp\perp} \subset \overline{F}$. D'autre part, d'après (i) du Lemme 1.1.4, $F \subset F^{\perp\perp}$, mais $F^{\perp\perp}$ est un fermé $\overline{F} \subset F^{\perp\perp}$. D'où $F^{\perp\perp} = \overline{F}$. ■

1.4.9 Remarque
D'après le corollaire précédent, $F^{\perp\perp}$ est le plus petit fermé contenant F.

1.4.10 Exercice Soit H un espace de Hilbert, M un sous-espace fermé, et N un sous-espace de dimension finie de H. Montrer que $M + N$ est un sous-espace fermé de H.

1.4.11 DÉFINITION
Soit H un espace de Hilbert. Un endomorphisme $P : H \to H$ est un opérateur auto-adjoint (ou hermitien) si $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$ pour tout $x, y \in H$.

1.4.12 Exercice Soit P un opérateur auto-adjoint d'un espace de Hilbert H tel que $P^2 = P$. Montrer que P est la projection orthogonale sur un sous-espace fermé de H.

1.4.13 PROPOSITION
Soit $\{x_i\}_{i\in I}$ un système orthonormé d'un préhilbertien H. Alors

(a) Pour tout $S \subset I$ sous-ensemble fini on a

$$\|\sum_{i\in S} x_i\|^2 = \sum_{i\in S} \|x_i\|^2;$$

(b) Tout système orthonormé $\{x_i\}_{i\in I}$ est un sytème linéairement indépendant de H, i.e. pour tout $S \subset I$ sous-ensemble fini, $\{x_i\}_{i\in S}$ sont linéairement indépendents.

Une conséquence de cette proposition est, comme une suite orthogonale (ou orthonormée) est un système linéairement indépendant, alors si H contient un système orthogonal infini, alors H est de dimension infinie. La réciproque est donnée par le procédé de Gram-Schmidt 1.3.12.

Soit H un préhilbertien de dimension infinie et soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée. Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ converge vers $x \in H$ alors

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n,$$

En effet, par continuité du produit scalaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle x, e_n\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, e_n \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \langle e_k, e_n\rangle = \alpha_n, \tag{1.14}$$

d'où

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n. \tag{1.15}$$

En dimension finie, ces séries convergent puisque toute suite orthonormée est finie. Par contre, en dimension infinie, il y a deux questions fondamentales concernant le membre de droite de la formule (1.15)

1° Est-ce que la série converge ?

2° Si la série converge, converge-t-elle vers x dans H ?

Plus généralement : est-ce que la famille est sommable ? et si elle est sommable sa somme est-elle égale à x ? Voir en appendice la notion de famille sommable

On va traiter ces questions dans le cas général

1.4.14 PROPOSITION

(l'inégalité de Bessel) Soit H un espace préhilbertien et soit $\{e_i\}_{i\in I}$ un système orthonormé dans H. Alors pour tout $x \in H$, la famille réelle $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in I}$

est sommable et on a l'inégalité de Bessel suivante :

$$\sum_{\alpha\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2. \tag{1.16}$$

Démonstration: Soit $S \subset I$ un sous-ensemble fini. Alors,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x - \sum_{i\in S}\langle x, e_i\rangle\|^2 &= \|x\|^2 - 2\mathfrak{Re}\sum_{i\in S}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, x\rangle + \sum_{i\in S}|\langle x, e_i\rangle|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i\in S}|\langle x, e_i\rangle|^2 \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{i\in S} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

En prenant le sup sur tous les sous-ensembles fini $S \subset I$, on obtient l'inégalité de Bessel : $\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$. ∎

1.4.16 REMARQUE

On appellera **identité de Parseval** *si l'égalité a lieu dans l'inégalité de Bessel i.e.* $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$. (1.16).

1.4.17 PROPOSITION

Soit H un espace préhilbertien et soit $\{f_i\}_{i\in I}$ un système orthogonal dans H. Alors $S = \sum_{\alpha\in I} f_i$ existe si et seulement si $\sum_{\alpha\in I} \|f_i\|^2 < \infty$.

On suppose que $\sum_{\alpha\in I} \|f_i\|^2 < \infty$, alors

1. $\|S\|^2 = \sum_{\alpha\in I} \|f_i\|^2$
2. Pour tout $x \in H$, on a $\langle x, S\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle$.

Démonstration:

1.4.19 COROLLAIRE

Soit H un espace préhilbertien et soit $\{e_i\}_{i\in I}$ un système orthonormé dans H. On pose $F = \overline{vect\{e_i\}_{i\in I}}$.

Alors pour tout $x, y \in H$ on a :

1. $P_F x = \sum_{\alpha\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$
2. $\|P_F x\|^2 = \sum_{\alpha\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$
3. $\langle P_F x, y\rangle = \sum_{\alpha\in I}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle$

Démonstration: D'après l'inégalité de Bessel, pour tout $x \in H$, $\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ et daprès la proposition précédente $Px := \sum_{\alpha\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$ existe dans H, et pour tout $y \in H$ on a

$$\langle Px, y\rangle = \langle \sum_{\alpha\in I}\langle x, e_i\rangle e_i, y\rangle = \sum_{\alpha\in I}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle.$$

En particulier si $y = e_j$, alors $\langle Px, e_j\rangle = \langle x, y\rangle$, i.e. $\langle x - Px, e_j\rangle = 0$, comme $j \in I$ est quelconque, on a pour tout $y \in vect\{e_i\}_{i\in I}$, $\langle x - Px, y\rangle = 0$ et par continuité du produit scalaire, $\langle x - Px, y\rangle = 0$ pour tout $y \in F$, d'après le théorème de la projection on a $P = P_F$.

Maintenant, $P_F^2 = P_F$ et P_F auto-adjoint entraînent : $\|P_F x\|^2 = \langle P_F x, P_F x\rangle = \langle P_F^2 x, x\rangle = \langle P_F x, x\rangle = \sum_{\alpha\in I}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, x\rangle = \sum_{\alpha\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle x, e_i\rangle} = \sum_{\alpha\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2$. ■

1.5 Base Hilbertienne

1.5.1 Définition

Soit H un espace de Hilbert. Une **base hilbertienne** de H est un système orthonormé $\{e_i\}_{i\in I}$ total c-à-d que $H = \overline{vect\{e_i\}_{i\in I}}$.

1.5.2 Remarque

- *$\{e_i\}_{i\in I}$ est une base Hilbertienne si et seulement si* $\begin{cases} \langle x, e_i\rangle = 0 \\ \textit{pour tout } i \in I \end{cases} \Rightarrow x = 0.$
- *En effet, si $\langle x, e_i\rangle = 0$, pour tout $i \in I$, alors $x \in vect\{e_i\}_{i\in I}^{\perp} = \overline{vect\{e_i\}_{i\in I}}^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$.*

1.5.3 Théorème

Soit H un espace de Hilbert et $\{e_i\}_{i\in I}$ un système orthonormé.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\{e_i\}_{i\in I}$ est une base hilbertienne.
2. Pour tout $x \in H$, $x = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$
3. Pour tout $x, y \in H$,
$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle}$$
4. Pour tout $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2$ (l'identité de Parceval)

Démonstration:
- (1)$\Rightarrow$ (2), D'après le corollaire1.4.19, appliqué à $F = H$ et donc P_H est égale à l'identité, on aura pour tout $x \in H$: $x = P_H x = \sum_{\alpha\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$

– (2)⇒(3), conséquence de la proposition précédente
– (3)⇒(4), Il suffit de prendre $y = x$
– (4)⇒(1), Si $x \in \overline{vect\{e_i\}_{i\in I}}^{\perp}$, d'après 4), $\|x\| = 0$, i.e. $x = 0$, ceci entraîne que $\overline{vect\{e_i\}_{i\in I}}^{\perp} = \{0\}$ et donc $\overline{vect\{e_i\}_{i\in I}} = \{0\}^{\perp} = H$. ∎

On va m'aintenant s'intéresser au problème de l'existence d'une base hilbertienne. On va commencer par considérer le cas dénombrable.

1.5.5 Définition

Soit (E, d) un espace métrique.

On dit que E est **séparable** s'il existe une partie dénombrable $\mathbb{D}$ sous-ensemble de E qui soit dense dans E i.e $\overline{\mathbb{D}} = E$.

1.5.6 Exemple. Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont séparables.

$\mathbb{D} = \mathbb{Q}$ pour le premier et $\mathbb{D} = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ pour le second.

1.5.7 Exemple.

1. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, l'espace de Banach $\ell^p(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}; \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < +\infty\}$ est séparable (exercice)
2. Par contre, l'espace de Banach $\ell^\infty(\mathbb{N}) = \{(x_n); \|(x_n)\|_\infty = \sup_n |x_n| < +\infty\}$ n'est pas séparable.

Preuve :

On note, pour tout $A \subset \mathbb{N}$, par χ_A l'élément de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ défini par $\chi_A(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{si } n \notin A \end{cases}$

On remarquera que $A \neq B$ si et seulement si $\|\chi_A - \chi_B\|_\infty = 1$

Maintenant, si on suppose que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ est séparable, il existe alors un sous-ensemble dénombrable $D \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$ tel que $\overline{D} = \ell^\infty(\mathbb{N})$, en particulier pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ il existe $d_A \in D$ tel que $\|d_A - \chi_A\|_\infty < \frac{1}{2}$, On définit une application $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to D$ en associant à $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ une des suites $d_A \in D$. Cette application est injective, car si $A \neq B$, l'inégalité triangulaire nous donne

$$\|d_A - d_B\|_\infty \geq \|\chi_A - \chi_b\|_\infty - \|d_A - \chi_A\|_\infty - \|d_B - \chi_B\|_\infty > 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

et donc $d_A \neq d_B$ i.e. l'application ϕ est injective.

Ainsi, $CardD \geq Card\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mais comme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est équipotent à $\mathbb{R}$, ceci contredit l'hypothèse D dénombrable.

1.5.8 Théorème

Un espace de Hilbert H est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne dénombrable.

Dans ce cas toutes les bases hilbertiennes sont dénombrables.

Démonstration: Soit $\mathbb{D} = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sous-ensemble dénombrable et dense dans H. On peut supposer que la famille est libre. D'après le procédé de Gram-Schmidt1.3.12, il existe une suite orthonormée $\{e_n\}_{n\geq 1}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{vect}\{e_1, \cdots, e_n\} = \text{vect}\{u_1, \cdots, u_n\}$. Il nous reste à montrer que la suite est totale.

Soit $x \in H$, tel que $\langle x, e_n\rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors, $\langle x, u_n\rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme, $\mathbb{D}$ est dense dans H, on peut choisir une sous-suite u_{n_k} telle que $\lim_{k\to+\infty} u_{n_k} = x$, par suite $\|x\|^2 = \lim_{k\to+\infty}\langle x, u_{n_k}\rangle = 0$ d'où $x = 0$.
Réciproquement, soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H. On pose

$$\mathbb{D} = vect_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\sum_{n\in I} a_n e_n;\ I \subset \mathbb{N},\ card I < +\infty \text{ et } a_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\}.$$

On vérifie que $\mathbb{D}$ est dénombrable et dense dans H.

Finalement, soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne dénombrable de H (on vient de montrer l'existence) et $\beta = \{u_i\}_{i\in I}$ une autre base hilbertienne de H.

On pose, pour tout n, $B_n = \{u \in \beta; \langle e_n, u\rangle \neq 0\}$ et $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.
Comme la famille $\beta = \{u_i\}_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H, pour tout n, la série $\sum_{i\in I}\langle e_n, u_i\rangle u_i$ est sommable, ainsi B_n dénombrable (voir Appendice : proposition 1.7.5) et par suite B est dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables.

Soit $u \in \beta \setminus B$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle u, e_n\rangle = 0$ et comme $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne, $u = 0$, ce qui est impossible car $\|u\| = 1$, donc nécessairement $\beta \setminus B = \emptyset$ et par suite $\beta = B$ est dénombrable. ∎

1.5.10 EXEMPLE. *La suite orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\ell^2(\mathbb{N})$ donnée dans Exemple 1.2.6 est une base orthonormée. on l'appelera base stetard de $\ell^2(\mathbb{N})$. On rappelle que*

$$e_n = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1}, 1, 0, \cdots) \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En effet, pour tout $x = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, alors,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2.$$

d'après le théoreme 1.5.3, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne. Comme elle est dénombrable, l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$ est alors séparable.

Tout espace vectoriel normé de dimension finie n est algebriquement isomorphe et homéomorphe à $\mathbb{K}^n$. Le théorème suivant étend ce résultat aux espaces de Hilbert séparables de dimension infinie

1.5.11 Théorème

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne. Alors, l'application $\varphi : \mathcal{H} \to \ell^2(\mathbb{N})$, définie par $\varphi(x) = \{\langle x, e_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une application unitaire .

Démonstration: D'après l'inégalité de Bessel (1.16), φ est bien définie, i.e. $\varphi(x) \in \ell^2(\mathbb{N})$. Pour tout $x, y \in \mathcal{H}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \{\langle \alpha x + \beta y, e_n\rangle\} = \{\alpha\langle x, e_n\rangle + \beta\langle y, e_n\rangle\} = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y),$$

d'ou φ est linéaire. D'après, l'identité de Parseval, φ est surjective, en effet si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ alors $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n$ est un élément de $\mathcal{H}$, car $\langle x, e_n\rangle = a_n$.

φ est une isométrie car $\|\varphi(x)\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$.

Ainsi φ est un isomorphisme linéaire et isométrique. ∎

On va maintenant montrer que tout espace de Hilbert (même s'il n'est pas séparable) admet une base hilbertienne.Ce résultat est basé sur le lemme de Zorn (qui est un équivalent de l'axiome du choix).

1.5.13 Définition

Soit $(A, \leq)$ un ensemble ordonné.

– On dit qu'une partie $B \subset A$ est totalement ordonnée si $(B, \leq)$ est totalement ordonné, i.e. pour tout $x, y \in B$ on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.
– Un élément a de A est dit maximal s'il n'existe pas de $x \in A - \{a\}$ tel que $a \leq x$.
– On dit que $(A, \leq)$ est inductif si toute partie totalement ordonnée admet un majorant.

1.5.14 Lemme (Lemme de Zorn)

Tout ensemble ordonné et inductif admet un élément maximal.

1.5.15 Théorème

Tout espace de Hilbert $\mathcal{H}$ admet une base hilbertienne.

Démonstration: On désigne par $\mathcal{B}$ l'ensemble des systèmes orthonormés de $\mathcal{H}$, ordonné par l'inclusion ($\subset$).(cette relation est une relation d'ordre partiel)

Montrons que $(\mathcal{B}, \subset)$ est inductif.

Soit $\{B_i, i \in I\}$ une partie totalement ordonnée de $(\mathcal{B}, \subset)$, alors $\cup_{i\in I} B_i$ est un majorant, il suffit pour cela de montrer que $\cup_{i\in I} B_i$ est un sytème orthonormé. En effet, si $x, y \in \cup_{i\in I} B_i$, $x \neq y$, alors il existe $j \in I$ tel que $x, y \in B_j$, d'où $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\langle x, y\rangle = 0$, ainsi on a montrer que $\cup_{i\in I} B_i$ est un sytème orthonormé.

D'après le lemme de Zorn, il existe un élément maximal B dans $\mathcal{B}$. Il reste à montrer que B est total. Sinon, il existerait un $x \in H$ de norme 1 qui est orthogonal à B, en particulier $x \notin B$.

Alors, $B \cup \{x\}$ est un sytème orthonormé qui contient B, ceci contredit le caractère maximal de B. Donc B est total et par suite une base hilbertienne.

1.5.17 EXEMPLE. Soit I est un ensemble non dénombrable alors, $\ell^2(I, \mathbb{C}) = \{x = \{x_i\}_{i \in I} : x_i \in \mathbb{C}, \sum_{i \in I} |x_i|^2$ est sommable $\}$ est un espace de Hilbert non séparable.
Une base hilbertienne de $\ell^2(I, \mathbb{C})$ est donnée par la famille de vecteurs $\{e_i\}_{i \in I}$ avec $e_i = (\delta_{ij})_{j \in I}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker défini par $\delta_{ij} = 0$ si $j \neq i$ et $\delta_{ii} = 1$.

1.6 Le théorème de représentation de Riesz

Les espaces de Hilbert possèdes des propriétés de dualités remarquables.

1.6.1 DÉFINITION
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On note par E' son dual topologique, i.e. l'espace vectoriel des formes linéaires continues $f : E \to \mathbb{K}$.

Cet espace est muni de la norme

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|; \|x\| \leq 1\}.$$

1.6.2 Exercice Montrer que $(E', \|.\|)$ est un espace vectoriel normé complet i.e. un espace de Banach.

Soit H un espace de Hilbert, pour $y \in H$ on associe la forme linéaire sur H, $l_y : H \to \mathbb{C}$ définie par $l_y(x) = \langle x, y \rangle$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a $|l_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|y\| \|x\|$ d'où la forme linéaire l_y est continue, donc un élément de H'.

On définit alors une application $\Phi : H \to H'$, qui à $y \in H$ associe $\phi(y) = l_y$.

1.6.3 THÉORÈME (LE THÉORÈME DE REPRÉSENTATION DE RIESZ)
Soit H un espace de Hilbert. Alors

1) L'application Phi est une isométrie i.e. pour tout $y \in H$, $\|l_y\| = \|y\|$.
2) Si f est forme linéaire continue i.e. $f \in H'$, il existe un unique $y \in H$ tel que $f = l_y$ et $\|f\| = \|y\|$.

Démonstration: 1) Il suffit de supposer que $y \neq 0$, alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a $\|l_y\| \leq \|y\|$, d'autre part $l_y(y) = \|y\|^2$, entraîne $\|l_y\| \geq \|y\|$, d'où $\|l_y\| = \|y\|$.

2) Soit $f \in H'$, si $f = 0$, alors $f = l_0$. Maintenant, si $f \neq 0$, on pose $F = \ker f$, comme f est continue $\ker f$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, d'après le théorème 1.4.2, $F^\perp \neq \{0\}$. Il en résulte l'existence de $y_0 \in F^\perp - \{0\}$, alors $f(y_0) \neq 0$. On peut supposer quitte à diviser par le scalaire $f(y_0)$, que $f(y_0) = 1$.
Soit $x \in H$, on vérifie directement que $x - f(x)y_0 \in F$ d'où $\langle x - f(x)y_0, y_0 \rangle = 0$ et ainsi $\langle x, y_0 \rangle = f(x)\|y_0\|^2$, finalement $f(x) = \langle x, \frac{y_0}{\|y_0\|^2} \rangle = \langle x, y \rangle$ avec $y = \frac{y_0}{\|y_0\|^2}$.

1.6.5 COROLLAIRE

Soit H un espace de Hilbert. L'application $\Phi : H \to H'$, définie par $\Phi(x) = \langle ., x \rangle$ est une isométrie antilinéaire et bijective de H sur H'.

Application : Opérateur adjoint

Soient H et K deux espaces de Hilbert et $A : H \to K$ une application linéaire continue.

Il existe alors une unique application linéaire continue $A^* : K \to H$ telle que pour tout $x \in H$ et $y \in K$ on a :

$$\langle Ax, y \rangle_K = \langle x, A^* y \rangle_H$$

On a en plus $\|A^*\| = \|A\|$ et $A^{**} = A$.

L'application A^* est appelée l'application **adjointe** de A.

Démonstration: Soit $y \in K$ fixé, l'application de $H \to \mathbb{C}$ définie par $x \mapsto \langle Ax, y \rangle_K$ est une forme linéaire continue, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément de H, noté $A^* y$ tel que $\langle Ax, y \rangle_K = \langle x, A^* y \rangle_H$ Grâce à l'unicité, on définit ainsi une application $A^* : K \to H$. En utilisant encore l'unicité, on montre que A^* est linéaire.

On va maintenant établir sa continuité. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$|\langle x, A^* y \rangle_H| = |\langle Ax, y \rangle_K| \leq \|Ax\| \|y\| \leq \|A\| \|x\| \|y\|.$$

D'où la norme de la forme linéaire $x \mapsto \langle x, A^* y \rangle_H$, à savoir $\|A^* y\| \leq \|A\| \|y\|$. On en déduit la continuité de A^* et l'inégalité $\|A^*\| \leq \|A\|$.

Maintenant par unicité de l'opérateur adjoint, on aura $A^{**} = (A^*)^* = A$ et d'après ce qui précède $\|A\| = \|A^{**}\| \leq \|A^*\|$, d'où $\|A^*\| = \|A\|$. ∎

1.7 Annexe

I) Applications linéaires continues

1.7.1 Définition (Application linéaire)

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F$ des espace vectoriels normés, et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On définit la norme de T , $\|T\|$ par

$$\|T\| = \sup \{ \|Tx\|_F : x \in E, \ \|x\|_E \leq 1 \} .$$

Si $\|T\| < \infty$ on dit que T est bornée.

Dans ce cas, pour tout $x \in E$ on a $\|Tx\|_F \leq \|T\| \|x\|_E$.

1.7.2 Théorème

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espace vectoriels normés, et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire.Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. T est bornée
2. T est continue
3. T est continue en un point $x_0 \in E$.

II) Familles sommables

1.7.3 Définition

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est **sommable** de somme S et on écrit $S = \sum_{i \in I} x_i$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J_\varepsilon \subset I$ telle que pour toute partie finie $K \subset I$ contenant J_ε on ait $\|S - \sum_{i \in K} x_i\| < \varepsilon$.

1.7.4 Remarque

1. La somme d'une famille sommable est unique.
2. Soit $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ sont des familles sommables de somme respectivement S et S'. Alors pour tout λ , $\mu \in \mathbb{K}$ on la famille $(\lambda x_i + \mu y_i)_{i \in I}$ est sommable et de somme $\lambda S + \mu S'$.

Dans une famille sommable il n'y a qu'un nombre dénombrable de termes non nuls

1.7.5 Proposition

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de E, alors l'ensemble $D = \{i \in I; x_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Démonstration: D'après la définition de famille sommable, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un sous-ensemble fini J_n de I, tel que pour tout sous-ensemble fini $L \subset I - J_n$ on ait $\| \sum_{i \in L} x_i \| < \frac{1}{n}$.

En particulier, pour tout $i \in \subset I - J_n$ on a $\|x_i\| \leq \frac{1}{n}$.

D'autre part, $D = \cup_{n \geq 1} \{i \in I; \|x_i\| \geq \dfrac{1}{n}\}$ (en effet, si $x_i \neq 0$, alors il existe $n_0 \geq 1$ tel que $\|x_i\| \geq \frac{1}{n_0}$ i.e. $x_i \in \{i \in I; \|x_i\| \geq \frac{1}{n_0}\}$.

Finalement, $D \subset \cup_{n \geq 1} J_n$ est au plus dénombrable (contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles finis).

1.7.7 DÉFINITION (CRITÈRE DE CAUCHY)
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

On dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J_\varepsilon \subset I$ telle que pour toute partie finie $L \subset I$ disjointe de J_ε on ait $\| \sum_{i\in L} a_i\| < \varepsilon$.

1.7.8 THÉORÈME
(i) Toute famille sommable vérifie le critère de Cauchy.
(ii) Si $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach, on a réciproquement, toute famille vérifiant le critère de Cauchy est sommable

---

III) Complétion d'un espace espace vectoriel normé

Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé (non complet) on considère l'ensemble $\tilde{E}$ de toutes les suites de Cauchy de E. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $\tilde{E}$ par deux suites de Cauchy sont équivalentes si leur différence tend vers 0. On note $\overline{E} = \tilde{E}/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalences. Il n'est pas difficile de voir que $\overline{E}$ et $\tilde{E}$ héritent d'une structure d'espace vectoriel.

1.7.9 LEMME
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy de E alors la suite $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Démonstration: Grâce à l'inégalité $|\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \|x_n - x_m\|$, $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et la complétude de $\mathbb{R}$ permet de conclure. ∎

On peut alors définir la norme d'une suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par

$$\|(x_n)\|_0 = \lim_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$

Vérifier que $\|.\|_0$ est une norme sur $\overline{E}$ (mais pas sur $\tilde{E}$ pourquoi ?).

On a le théorème :

1.7.11 THÉORÈME
$(\overline{E}, \|.\|_0)$ est un espace de Banach et E est dense dans $\overline{E}$.

(On identifie $x \in E$ avec la classe des suites qui convergent vers x.)

L'espace $\overline{E}$ est le complété (ou la complétion) de E

Démonstration: En effet, si $(x^k) = \left([(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}]\right)$ est une suite de Cauchy de $\overline{E}$, alors $y = [(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}}]$ est sa limite (à vérifier). ∎

1.7.13 REMARQUE
Une autre construction du complété d'un espace préhilbertien :

Soit E un espace préhilbertien et E' son dual topologique. L'application $\phi : E \to E'$ définie par $\phi(y) = l_y$ est une isométrie antilinéaire (voir 1.6.3). On pose $H = \overline{\phi(E)}$. Alors H est complet, comme fermé du complet E', est un espace de Hilbert. D'autre part $\phi : E \to H$ est une isométrie d'image dense, alors H est le complété de E.