Université de Rennes
Département de Mathématiques Année 2011-2012

Master1 de Mathématiques
“Analyse réelle et complexe de base"
Feuille de TD n^{0}6

Exercice 7.1. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z(z-1)^2}\,dz$ où $\gamma(t) = 2e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$
2. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(z^2)}{z^2}\,dz$ où $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$
3. $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{3z^2 - 12z + 11}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}\,dz$, où $\gamma_r(t) = re^{it}$ $(t \in [0, 2\pi], r \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0, 1, 2, 3\}.)$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

Exercice 7.2. En évaluant $\int_C e^z\,dz$ sur le cercle unité, montrer que
$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\theta + \sin\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\theta + \sin\theta)\,d\theta = 0.$

Exercice 7.3. Soit f une fonction entière. Soit $R > 0$.

1. Calculer, pour $|z| < R$, $\displaystyle\frac{z}{2i\pi}\int_{C^+(0,R)} \frac{f(w)}{w(w-z)}\,dw.$
2. On suppose que : $\displaystyle\sup_{R>0}\int_0^{2\pi} |f(Re^{it})|\,dt < \infty$. Montrer que f est constante.
3. En déduire le théorème de Liouville.

Exercice 7.4. Soient A, B et $\alpha \in \mathbb{R}_+$,

Soit f une fonction entière telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$|f(z)| \leq A + B|z|^\alpha$$

Montrer que f est un polynôme.

Exercice 7.5. Soit f une fonction entière et ω et ω' deux nombre complexes tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$f(z + \omega) = f(z + \omega') = f(z)$$

Montrer que si ω et ω' sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants alors f est constante.

Exercice 7.6. Soit f une fonction entière non constante. Montrer que $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 7.7. Soit P un polynôme complexe de degré $n \geq 1$, ayant n racines $z_1, \ldots, z_n$ (non nécessairement distinctes).

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1 \dots, z_n\}$ on a :

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \dots + \frac{1}{z - z_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z - z_k}}{|z - z_k|^2}$$

2. En déduire le théorème de Gauss-Lucas :
Pour toute racine ξ de P', il existe n nombres réels $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ tels que : $\xi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k$. En d'autres termes : les zéros de P' appartiennent à l'enveloppe convexe des zéros de P.

Exercice 7.8. Soit f une fonction entière telle que $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty$.

1. Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros.
2. Soit $z_1, \dots, z_k$ les zéros de f (comptés avec leur multiplicité). Montrer qu'il existe un nombre complexe $C \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = C \prod\limits_{i=1}^{k} (z - z_i)$.

Exercice 7.9. soit f une fonction entière telle qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$ telles que $a\mathfrak{Re} f(z) + b\mathfrak{Im} f(z) \leq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

Exercice 7.10. Soit f une fonction holomorphe dans un domaine Ω contenant 0.

1. Montrer que si $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ pour n assez grand alors $f(z) = \frac{z}{z+1}$ sur $\Omega \cap D(0, 1)$.
2. Montrer que si $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{2n})$ pour $n \geq 1$ alors f est constante sur Ω.
3. $f^{(n)}(0) = (n!)^2$ pour n assez grand est-elle possible ?
4. Même quaestion pour $|f(\frac{1}{n})| \leq 2^{-n}$ pour n assez grand.

Exercice 7.11. Quel est le nombre de zéros (avec multiplicité) des polynômes suivants dans les disques indiqués :

1. $F(z) = z^6 - 6z + 10$ de module < 1.
2. $F(z) = z^4 - 3z^3 - 1$ de module < 2.
3. $F(z) = z^3 + z - 1$ de module $< \frac{1}{2}$.

Exercice 7.12. Quel est le nombre de zéros de $F(z) = z^4 - 5z - 1$ dans la couronne $1 < |z| < 2$.

Exercice 7.13. Montrer que $F(z) = z^n - ae^z$ a dans le disque $D(0, 1)$, n racines simples, si $0 < a < \frac{1}{e}$.

Exercice 7.14. Soit $r > 0$. Montrer que, pour n assez grand, $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ n'a pas de zéros pour $|z| \leq r$.

Exercice 7.15. Calculer
$$\max_{|z|\leq 1} |\sin z| \quad \text{et} \quad \max_{|z|\leq 1} \frac{|\sin z|}{|z|}$$

Exercice 7.16. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et continue sur $\overline{\Omega}$ et telle que $|f|$ est constante sur la frontière de Ω. Montrer que si f n'est pas constante alors elle admet un zéro dans Ω.

Exercice 7.17. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ contenant le disque unité fermé. Soit f et g deux éléments de $\mathcal{H}(\Omega)$ tels que $|f| = |g|$ sur le cercle unité. On suppose que f et g ne s'annulent pas dans Ω. Montrer qu'il existe un nombre complexe c, $|c| = 1$ tel que $f = cg$.

Exercice 7.18.

1. Soit $D = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$ et $a \in D$. Montrer que $\phi_a : D \to \mathbb{C}$ définie par $\phi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-z\bar{a}}$ est un isomorphisme de D dans lui-même.
2. Soit $f \in \mathcal{H}(D)$.
   Montrer que si $|f(z)| \leq 1$ dans D alors $|f(z) - f(0)| \leq |z||1 - f(z)f(\bar{0})|$.
   (ind. : on pourra utiliser $\phi_{f(0)} \circ f$.)
   En déduire qu'on a $|f'(0)| < 1$ ou bien $f(z) = z.e^{i\alpha}$, pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.19. Soit $f \in C(\overline{D(0,1)}) \cap \mathcal{H}(D(0,1))$, montrer :

1. $\int_{C(0,1)} f(w)\, dw = 0$
2. pour tout $z \in D(0,1)$, $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,1)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$

Exercice 7.20.

1. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ une suite qui converge uniformément (sur tout compact de Ω) vers une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$.
   Montrer que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et que f'_n converge uniformément (sur tout compact de Ω) vers f'.
2. Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ est injective alors f est injective ou constante.

Exercice 7.21.

1. Soit $f(z) = \frac{2}{z^2-4z+3}$ déterminer les séries de Laurent de f dans chacune des couronnes : $0 < |z| < 1$, $1 < |z| < 3$ et $3 < |z|$
2. Représenter la fonction $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ comme une série de Laurent dans la couronne $C(i; 0, 2)$. Quel type de singularité a f au point i ?
3. Déterminer le type de singularité des fonctions suivantes
$$\frac{1}{e^z - 1} \quad \frac{z^3}{e^{1/z} - 1} \quad \frac{z}{(2\sin z - 1)^2}.$$

4. Déterminer les résidus des fonctions suivantes :
   (a) $\frac{z^2}{(z-1)^3(z+1)}$ au point $z = 1$
   (b) $\frac{e^z}{\sin^4 z}$ au point $z = 0$
   (c) $e^{(z+1/z)}$ au point $z = 0$

Exercice 7.22. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r_0 > 0$. Montrer que si $f \in \mathcal{H}(D^*(a, r_0)$ a une singularité essentielle en a alors pour tout $0 < r < r_0$, $f(D^*(a, r))$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 7.23. Calculer les deux intégrales suivantes :

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2 + x^2} dx \quad (a > 0) \qquad b) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b\cos\theta)^2} \quad (a > b > 0).$$

Exercice 7.24. Soient $a = (1 + i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et f définie par $f(z) = \dfrac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}}$.

Pour tout $R > 0$ on note γ_R le lacet correspondant au parallélogramme de sommets $-R$, R, $R + a$ et $-R + a$ orienté dans le sens positif.

1. Calculer a^2. Montrer que $f(z) - f(z + a) = e^{-z^2}$
2. Calculer $\int_{\gamma_R} f(z)dz$.
3. Utiliser ce résultat pour montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice 7.25. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{\sin x}{x} \, dx$.

Exercice 7.26. [Utilisation du logarithme]

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^3}$, en intégrant $\dfrac{\ln z}{1 + z^3}$, $\ln$ désignant ici la détermination du logarithme avec coupure sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer simultanément les intégrales $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1 + x^4}$ et $J = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{Ln} x}{1 + x^4} \, dx$.
   (Intégrer cette fois $\dfrac{(\ln z)^2}{1 + z^4}$.)
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1 + x^2)} dx$

Exercice 7.27. Calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n} \ (n \geq 2) \qquad b) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a + bx^2)^n} \ (a, b > 0, n \in \mathbb{N}^*)$$

$$c) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (x + 1)} \ (\alpha \in]0, 1[) \qquad d) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1 + x^2} \, dx.$$