Université de Rennes
Département de Mathématiques Année 2011-2012

Master1 de Mathématiques
“Analyse réelle et complexe de base"
Feuille de TD n^{0}5

Exercice 5.1. En considérant la fonction $z \mapsto e^{iz} - 1$, montrer que le théorème de Rolle n'est pas valable pour les fonctions holomorphes.

Exercice 5.2. Soit $f(z) = z\mathfrak{Re}z + \bar{z}\mathfrak{Im}z + \bar{z}$

1. Déterminer l'ensemble des points où f est $\mathbb{C}$-différentiable. Calculer sa dérivée en chacun de ces points.
2. Est-elle holomorphe ?

Exercice 5.3. Montrer que la fonction $f(z) = \begin{cases} exp(-\frac{1}{z^4}) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$ vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en tout points de $\mathbb{C}$, mais n'est pas $\mathbb{C}$-différentiable à l'origine.

Exercice 5.4. Soit $f : U \to \mathbb{C}$, U ouvert de $\mathbb{C}$.

On pose $\dfrac{\partial}{\partial z} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$

1. On suppose f $\mathbb{R}$-différentiable en $a \in U$. Montrer que f est $\mathbb{C}$-différentiable si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$. Dans ce cas $f'(a) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(a)$.
2. On suppose f de classe C^2 dans U. On dit que f est harmonique dans U si $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

   Montrer que f est harmonique si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ est holomorphe.

Exercice 5.5. Soit f une fonction holomorphe sur un domaine (non vide), Ω de $\mathbb{C}$. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $f' \equiv 0$.
2. f est constante.
3. $\mathfrak{Re}(f)$ est constante.
4. $\mathfrak{Im}(f)$ est constante.
5. $\overline{f}$ est holomorphe.
6. $|f|$ est constante.
7. il existe $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$, $c \in \mathbb{R}$ telles que $a\mathfrak{Re}(f) + b\mathfrak{Im}(f) = c$.

Montrer que les fonctions holomorphes f sur $\mathbb{C}$ telles que $|f(z)| = (x^2 + y^2)e^x$ sont de la forme cz^2e^z où $|c| = 1$.

Exercice 5.6.

On dit que deux fonctions réelles $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont conjuguées harmoniques si $u + iv$ est holomorphe.
Déterminer les conjuguées harmoniques des fonctions harmoniques suivantes dans les ouverts indiqués :

1. $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ sur $\mathbb{C}$
2. $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
3. $u(x, y) = \cos x \cosh y$ sur $\mathbb{C}$
4. $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ sur $\mathbb{C} \setminus \{x + iy |\, y = 0, x \leq 0\}$

Exercice 5.7. Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$, $F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, telles que $\mathfrak{Re} f(z) = F(\mathfrak{Im} f(z))$, pour tout $z \in U$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 5.8. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ invariant par rapport à la symétrie relativement à l'axe réel, et $f \in \mathcal{H}(U)$. Pour tout $z \in U$, on pose $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Prouver que $g \in \mathcal{H}(U)$.

Exercice 5.9.

1. Trouver tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que $1 < |e^{iz}| \leq 2$.
2. Trouver un $z \in \mathbb{C}$ tel que $|\cos(z)| > 1$.

Exercice 5.10. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$. Soit C un arc de classe C^1 dans Ω paramétré par $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$.

a) Montrer que $\overline{\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz} = \displaystyle\int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})}\, dz$

b) On suppose que C est le cercle unité orienté dans le sens positif. Montrer que $\overline{\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz} = -\displaystyle\int_\gamma \overline{f(z)}\, \frac{dz}{z^2}$

Exercice 5.11. Si $\mathcal{C}$ est l'arc de courbe d'équation $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ joignant les points $(1, 1)$ et $(2, 3)$, trouver la valeur de $\int_{\mathcal{C}} (12z^2 - 4iz) dz$.

Exercice 5.12. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on considère le lacet $\gamma_{a,r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma_{a,r}(t) = a + re^{it} = a + r(\cos(t) + i \sin(t))$

1. Calculer : $\displaystyle\int_{\gamma_{2,1}} \frac{z^7 + 1}{z(z^2 + 1)}\, dz$ et $\displaystyle\int_{\gamma_{1,\frac{3}{2}}} \frac{z^7 + 1}{z(z^2 + 1)}\, dz$
2. Calculer : $\displaystyle\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{-i,1}} \frac{e^z}{z^2 + 1}\, dz$
3. Calculer : $\displaystyle\int_{\gamma_{1,1}} \left(\frac{z}{z - 1}\right)^n dz$