Université de Rennes
Département de Mathématiques Année 2011-2012

Master1 de Mathématiques
"Analyse réelle et complexe de base"
Feuille de TD n^{0}4

Exercice 4.1. Calculer les transformées de Fourier de f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \begin{cases} \cos(2\pi x) & \text{si } |x| \leq \frac{1}{4} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} \sin(2\pi x) & \text{si } |x| \leq \frac{1}{4} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 4.2. Soit A une matrice symétrique réelle $n \times n$ telle qu'il existe une constante $\alpha > 0$ avec $\langle Ax, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que la fonction f définie par $x \mapsto e^{-\langle Ax,x \rangle}$ est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.
2. On se propose de calculer la transformée de Fourier de f.
   i) Traiter le cas $n = 1$.
   ii) Traiter le cas A diagonale.
   iii) En diagonalisant A dans une base orthonormée, déduire la transformée de Fourier de f.

Exercice 4.3. Calculer la transformée de Fourier de f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx$.

Exercice 4.4. Soit f la fonction indicatrice de l'intervalle $[-1, 1]$.

a) Calculer $\widehat{f}$ et $f \star f$.

b) En déduire les transformées de Fourier des fonctions :
$$x \mapsto (2 - |x|)\mathbb{1}_{[-2,2]} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{\sin^2(2\pi x)}{x^2}\, dx.$$

Exercice 4.5. Soit $\lambda > 0$ on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\lambda|x|}$.

a) Calculer la transformée de Fourier de f.

b) En déduire la transformée de Fourier de l'application $x \mapsto \frac{1}{1+4\pi^2 x^2}$.

c) En déduire les valeurs des intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Exercice 4.6. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction impaire.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\hat{f}(x) = -2i \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(2\pi xt)dt$.

b) Prouver que la fonction $\phi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du$ est définie, continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

c) Montrer que l'on a : $\displaystyle\int_1^R \frac{\hat{f}(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} -2if(x)\left(\int_{2\pi x}^{2\pi Rx} \frac{\sin u}{u}du\right)dx$.

En déduire : $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{\hat{f}(t)}{t}dt = -2i\int_0^{+\infty} f(x)\phi(2\pi x)dx$.

d) Soit g la fonction impaire, définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{\ln(ex)} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

i) Montrer que $g \in C_0(\mathbb{R})$.

ii) On suppose que g est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable f. Montrer que f est nécessairement impaire (presque partout).

iii) En déduire que g n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable i.e. l'application $\widehat{\ }: L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

Exercice 4.7.

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que pour tout $g \in L^1(\mathbb{R})$ on ait $g \star f = g$.
2. Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$, l'équation $f \star f = f$.

Exercice 4.8. Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f. Pour $g \in L^2(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{F}(g)$ la transformée de Fourier-Plancherel de g.

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$. Parmi les deux formules suivantes, laquelle peut avoir un sens ? $\widehat{f \star g} = \hat{f}\mathcal{F}(g)$ ou $\mathcal{F}(f \star g) = \hat{f}\mathcal{F}(g)$.
2. Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Parmi les deux formules suivantes, laquelle peut avoir un sens ? $\mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(fg)$ ou $\mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g) = \widehat{fg}$.
3. On note $f_a(x) = \frac{\sin(\pi ax)}{\pi x}$. Déduire de la question précédente $f_a \star f_b$, avec $a, b > 0$.
4. Montrer que l'équation $f \star f = f$, où $f \in L^2(\mathbb{R})$ admet une infinité de solutions. Comparer avec le cas où $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 4.9. l'espace de Schwartz est l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions C^∞, vérifiant $(1 + \|.\|)^m D^\alpha f \in L^\infty$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

(1) Montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

(2) Soient f et g deux éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Justifier que fg et $f \star g$ sont encore éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

(3) Montrer que la transformée de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.