Université de Rennes
Département de Mathématiques Année 2010-2011

Master1 de Mathématiques
“Analyse réelle et complexe de base"
Feuille de TD n^{0}2

Exercice 2.1. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n.

1. Vérifier que l'application $\langle ., . \rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\langle M, N \rangle = \mathrm{tr}({}^t M N)$ est un produit scalaire.
2. Déterminer la norme de la matrice identité et de la matrice $M = (i + j)_{1 \leq i, j \leq n}$
3. On note par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques.
   Montrer $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
4. Déterminer $\inf \left\{ \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij} - i - j)^2 | \text{ où } A = (a_{ij}) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \right\}$.

Exercice 2.2. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

a) f est continue.
b) f est continue en 0.
c) f est continue en un point.
d) il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in E$ on ait $\|f(u)\|_F \leq C\|u\|_E$.

Exercice 2.3.

a) Soit E un espaces vectoriel et $P : E \to E$ une application linéaire telle que $P^2 = P$.
   Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathfrak{Im} f$ et que P est la projection sur $\mathfrak{Im} f$ parallèlement à Ker f.
b) Soit H un espace de hilbert et $P : H \to H$ une application linéaire.
   Montrer que P est la projection orthogonale sur un sev fermé de H si et seulement si P vérifie :

$$P^2 = P \text{ et } \forall x, y \in H, \langle P(x), y \rangle = \langle x, P(y) \rangle.$$

Exercice 2.4. Soit H un espace de Hilbert. Soient $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de déroissante de convexes fermés non vides ($C_n \supset C_{n+1}$) de H et $C = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

a) Montrer que C est un convexe fermé.

b) Montrer que pour tout $x \in H, n \geq m$, on a $\|P_{C_n}(x) - P_{C_m}(x)\| \leq 2d(d_n - d_m)$ où P_{C_n} et d_n (resp. P_C et d) sont la projection sur C_n et la distance de x à C_n (resp. la projection sur C et la distance de x à C).

c) En déduire que pour tout $x \in H$, $\lim_{n\to+\infty} P_{C_n}(x) = P_C(x)$.

Exercice 2.5. Soit N un entier naturel.
On considère la forme linéaire $f : l^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$, $u = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto f(u) = x_N$.
Déterminer le vecteur u_0 de $l^2(\mathbb{N})$ tel que pour tout $u \in l^2(\mathbb{N})$ on ait
$f(u) =< u, u_0 >$.

Exercice 2.6.

1. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} u_n z^n$ a un rayon de convergence ≥ 1.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, tel que $|\lambda| < 1$, on définit l'application $f : l^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$, par $f(u) = \sum_{n\geq 0} u_n \lambda^n$.
   Déterminer le vecteur u_0 de $l^2(\mathbb{N})$ tel que pour tout $u \in l^2(\mathbb{N})$ on ait $f(u) =< u, u_0 >$. Quelle est la norme de f?

Exercice 2.7.

1. L'ensemble $A = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}); \sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{n} = 0\}$, est-il fermé dans $l^2(\mathbb{N})$?
2. Montrer que $C = \{u \in L^2([0,1]); \int_0^1 \frac{u(t)}{t} = 0\}$ n'est pas fermé dans $L^2([0,1])$.
   indication : on pourra considérer la suite $u_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n^2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{n^2} < t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$
3. L'ensemble $B = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}); \sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 0\}$, est-il fermé dans $l^2(\mathbb{N})$?

Exercice 2.8. Soit E un espace de Hilbert et F_1 et F_2 deux sous-espace de E.
a) Montrer que $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$
b) Si de plus F_1 et F_2 sont fermés, montrer que $(F_1 \cap F_2)^\perp = \overline{F_1^\perp + F_2^\perp}$

Exercice 2.9. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $\Phi : H_1 \to H_2$ une application linéaire.

1) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\|\Phi(u)\| = \|u\|$, pour tout $u \in H_1$.
2. $< \Phi(u), \Phi(v) >=< u, v >$ pour tout $u, v \in H_1$.

2) Soit Φ une isométrie linéaire. Montrer que :

1. $\Phi(H_1)$ est un sous-espace de Hilbert de H_2.
2. Si E_1 est sous-espace vectoriel dense de H_1 alors $\Phi(E_1)$ est un sev dense dans $\Phi(H_1)$.
3. Si $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une base hilbertienne de H_1 alors $\Phi((e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est une base hilbertienne de $\Phi(H_1)$.

Exercice 2.10. (Polynômes de Legendre)

Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit une forme bilinéaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt.$$

1. Vérifier que $\mathbb{R}[X]$ muni de cette forme est un espace préhilbertien.
2. Est-ce que c'est un espace de Hilbert ? sinon quel est son complété ?
3. En appliquant à la base $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, montrer qu'il existe une unique famille orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans laquelle P_n est un polynôme de degrés n et $\langle P_n, X^n \rangle > 0$.
4. En déduire que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2([-1, 1])$.
5. On définit le polynôme Q_n par
$$Q_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$
Montrer que Q_n est de degré n et a n racines simples dans $]-1, 1[$.
Montrer que Q_n est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur à n et en déduire que $Q_n = \lambda_n P_n$.
Déterminer la valeur de $\|Q_n\|^2$ puis celle de λ_n. Enfin calculer $Q_n(1)$ et $Q_n(-1)$.
6. Établir les relations
$$\forall n \geq 2, \quad nQ_n = (2n-1)XQ_{n-1} - (n-1)Q_{n-2}$$
et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)P_n'\right](x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$