Université de Rennes
Département de Mathématiques Année 2011-2012

# Master1 de Mathématiques
# “Analyse réelle et complexe de base"
### Feuille de TD $n^0 1$

## 1. Espaces de Hilbert

**Exercice 1.1.** Soit $E$ un espace préhilbertien. Soit $u, v$ deux vecteurs de $E$.

1. Montrer que le cas d'égalité $| < u, v > | = \|u\| \, \|v\|$ a lieu si et seulement si $u$ et $v$ sont colinéaires.

   Qu'en est-il de l'égalité $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$.

2. Soit $u$ un vecteur non nul et $\alpha$ un réel. Soit $f : E \to E$ définie par $f(x) = x - \alpha\langle x, u\rangle.u$ pour tout $x$.
   Déterminer $\alpha$ pour que $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pout tout $(x, y) \in E^2$.

**Exercice 1.2.** Pour $p \in [1, +\infty]$, on définit sur $\mathbb{C}^2$, la norme $\| \|_p$ par $\|(x, y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$ si $p < +\infty$ et $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$.
Montrer que $\| \|_p$ est associée à un produit scalaire si et seulement si $p = 2$.

**Exercice 1.3.** Pour $p \in [1, +\infty]$, montrer que la norme de $L^p([0, 1], \mathbb{C})$ est issue d'un produit scalaire si et seulement si $p = 2$

**Exercice 1.4.** L'espace $C([0, 1])$ des fonctions continues sur $[0, 1]$, muni du produit scalaire induit par $L^2([0, 1])$: $< u, v >= \int_0^1 u(t)\overline{v(t)}\, dt$, est-il un espace de Hilbert?

**Exercice 1.5.** Soit $h^1(\mathbb{N}) = \{a \in l^2(\mathbb{N}), \sum_{n=0}^{\infty} n^2|a_n|^2 < +\infty\}$. On pose pour tout $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ éléments de $h^1(\mathbb{N})$

$$< a, b >= \sum_{n=0}^{+\infty}(1 + n^2)a_n\overline{b_n}.$$

1. Montrer que l'application $< .,. >$ est un produit scalaire. Montrer $h^1(\mathbb{N})$ muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert.

2. Montrer que $h^1(\mathbb{N})$ est dense dans $l^2(\mathbb{N})$.

3. Montrer que la boule unité fermée de $h^1(\mathbb{N})$ est compacte dans $l^2(\mathbb{N})$.

**Exercice 1.6.**

1. Soit $H$ un espace de Hilbert et $a \in H \setminus 0$. Montrer que $\forall u \in H$ $d(u, \{a\}^{\perp}) = \frac{|<u,a>|}{\|a\|}$.

2. Soit $F$ le sous-espace de $L^2([0, 1])$ défini par $F = \{f \in L^2([0, 1]), \int_0^1 f(x)\, dx = 0\}$. Montrer que $F$ est un fermé et calculer la distance de la fonction $f : x \mapsto e^x$ à $F$.

**Exercice 1.7.** Soit $E$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que la boule unité $B = \{u \in E, \|u\| \leq 1\}$ est un convexe fermé.

2. Pour tout $\|u\| > 1$, montrer l'existence d'un $v \in B$ tel que $\|u - v\| = d(u, B)$. Est-il unique?

**Exercice 1.8.** Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'une norme qui vérifie l'identité du parallélogramme: pour tout $u, v \in E$: $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$
On définit l'application $f : E \times E \to \mathbb{C}$ par

$$f(u, v) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|u + i^k v\|^2$$

On se propose d'établir que $f$ est un produit scalaire de norme associée $\|.\|$ ( théorème de Von neumann).

Montrer que pour tout $u, v, w \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

1. $f(u, u) = \|u\|^2$
2. $f(u, v) = \overline{f(v, u)}$
3. $f(u + v, w) = 2f(u, \frac{w}{2}) + 2f(v, \frac{w}{2})$
4. $f(u, v) = 2f(u, \frac{v}{2})$
5. $f(u + v, w) = f(u, w) + f(v, w)$
6. $f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v)$.

(on commencera par $\lambda \in \mathbb{N}$, puis on étendra à $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et enfin à $\mathbb{C}$).

**Exercice 1.9.** Soit $H$ un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée dans $H$.

1. Soit $u \in H$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} < u, e_n >= 0$. En déduire la limite de la suite $\|u - e_n\|$.
2. Montrer que le sous-espace $V = \{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est fermé borné mais non compact. (indication: calculer $\|e_m - e_n\|$)
3. Montrer que $W = \{(1 + \frac{1}{n})e_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est fermé, mais qu'il n'existe aucun élément $v \in W$ tel que $d(0, W) = \|v\|$.

**Exercice 1.10.** Soient $H_1$ et $H_2$ deux espaces de Hilbert et $\Phi : H_1 \to H_2$ une application linéaire.

1) Montrer que les relation suivantes sont équivalentes:

1. $\|\Phi(u)\| = \|u\|$, pour tout $u \in H_1$.
2. $< \Phi(u), \Phi(v) >=< u, v >$ pour tout $u, v \in H_1$.

2) Soit $\Phi$ une isométrie linéaire. Montrer que:

1. $\Phi(H_1)$ est un sous-espace de Hilbert de $H_2$.
2. Si $E_1$ est sous-espace vectoriel dense de $H_1$ alors $\Phi(E_1)$ est un sev dense dans $\Phi(H_1)$.
3. Si $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une base hilbertienne de $H_1$ alors $\Phi((e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ est une base hilbertienne de $\Phi(H_1)$.

**Exercice 1.11.** Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1) On dit que $E$ est *lisse* si la fonction norme possede des dérivées dans toutes les directions en tout point différent de l'origine, en d'autres termes pour tout $u \neq 0$ et $v \in E$ on a $\lim_{t\to 0} \frac{\|u+tv\|-\|u\|}{t}$ existe.

2) On dit que $E$ est *uniformément convexe* si pour tout $\epsilon > 0$,

$$\inf\left\{1 - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|, \text{tel que } \|u\| = \|v\| = 1, \|u - v\| > 2\epsilon\right\} > 0.$$

Montrer qu'un espace préhilbertien est lisse et uniformément convexe.