Université de Rennes 1 Master 1
Année 2009-2010 ARCB

Examen Terminal 1ere session
corrigé

Corrigé exercice 4

1. $p_\alpha(z) = e^{\alpha L(z)} = e^{\alpha(Ln|z|+iArg(z))}) = |z|^\alpha e^{i\alpha Arg(z)}$ avec $-\pi < Arg(z) < \pi$.

   $|p_\alpha(z)| = |e^{\alpha L(z)}| = e^{\mathfrak{Re}\alpha L(z)} = e^{\mathfrak{Re}\alpha . \mathfrak{Re} L(z) - \mathfrak{Im}\alpha . \mathfrak{Im} L(z)} = e^{Ln|z|.\mathfrak{Re}\alpha - Arg(z)\mathfrak{Im}\alpha} = |z|^{\mathfrak{Re}\alpha} e^{-Arg(z)\mathfrak{Im}\alpha} \leqslant |z|^{\mathfrak{Re}\alpha} e^{|Arg(z)|.|\mathfrak{Im}\alpha|}$

   Comme, $|Arg(z)| < \pi$, $e^{|Arg(z)|.|\mathfrak{Im}\alpha|} \leqslant e^{\pi|\mathfrak{Im}\alpha|}$ d'où $|p_\alpha(z)| \leqslant |z|^{\mathfrak{Re}\alpha} e^{\pi|\mathfrak{Im}\alpha|}$.

2. p_α et la fonction z^4+4 sont holomorphes sur Ω, leur quotient f est donc une fonction méromorphe sur Ω. Les pôles de f sont les zéros de z^4+4.

   La fonction z^4+4 s'annule lorsque $z^4 = -4$, c-à-d aux points $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i, z_1 = iz_0, z_2 = i^2 z_0 = -z_0$ et $z_3 = i^3 z_0 = -iz_0$.

   Comme pour tout $i \in \{0,1,2,3\}$, $p_\alpha(z_i) \neq 0$ et z_i est une racine simple de $z^4+4 = 0$,les z_i sont des pôles simples de f.

3. (a) Au voisinage de 0, $\frac{x^\alpha}{x^4+4} \simeq x^\alpha$, donc l'intégrale converge si et seulement si $\alpha > -1$
   Au voisinage de $+\infty$, $\frac{x^\alpha}{x^4+4} \simeq x^{\alpha-4}$, donc l'intégrale converge si et seulement si $\alpha - 4 < -1$ i.e. $\alpha < 3$
   Finalement, $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^4+4}\,dx$ converge si et seulement si $-1 < \alpha < 3$.

   (b) Le lacet est C^1 par morceaux $\gamma_{R,\epsilon}$ est contenu dans Ω et les pôles de f ne sont pas sur $\gamma_{R,\epsilon}$. Le théorème des résidus s'applique donc et nous donne:

   $$\int_{\gamma_{R,\epsilon}} f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{i=0}^{3} Res(f,z_i) Ind_{\gamma_{R,\epsilon}}(z_i)$$

   Pour $R > \sqrt{2} > \epsilon > 0$, le domaine limité par $\gamma_{R,\epsilon}$ contient seulement z_0, d'où $Ind_{\gamma_{R,\epsilon}}(z_0) = 1$ et $Ind_{\gamma_{R,\epsilon}}(z_i) = 0$ pour $i \neq 0$.
   Comme $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ est un pôle simple de f, le résidu de f en ce point vaut:
   $Res(f,z_0) = \frac{p_\alpha(z_0)}{4z_0^3} = \frac{(\sqrt{2})^{\alpha-1}e^{i(\alpha-1)\frac{\pi}{4}}}{8i}$.
   On obtient alors,

   $$\int_{\gamma_{R,\epsilon}} f(z)\,dz = 2i\pi Res(f,z_i) Ind_{\gamma_{R,\epsilon}}(z_i) = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2})^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)\frac{\pi}{4}}.$$

(c) Si on note γ_ϵ le quart de cercle de centre 0 et de rayon ϵ orienté dans le sens négatif et γ_R le quart de cercle de centre 0 et de rayon R orienté dans le sens positif, on obtient

$$\int_{\gamma_{R,\epsilon}} f(z)\,dz = \int_{[\epsilon,R]} f(z)\,dz + \int_{[iR,i\epsilon]} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_\epsilon} f(z)\,dz.$$

i) $\displaystyle\int_{[\epsilon,R]} f(z)\,dz = \int_\epsilon^R \frac{x^\alpha}{x^4+4}\,dx \xrightarrow{\epsilon\to 0;\,R\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^4+4}\,dx$

ii) $\displaystyle\int_{[iR,i\epsilon]} f(z)\,dz = \int_\epsilon^R \frac{e^{i(\alpha-1)\frac{\pi}{2}}x^\alpha}{x^4+4}\,dx \xrightarrow{\epsilon\to 0;\,R\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{i(\alpha-1)\frac{\pi}{2}}x^\alpha}{x^4+4}\,dx$

D'autre part, $|f(z)| \leqslant \frac{|p_\alpha(z)|}{||z|^4-4|} \leqslant \frac{|z|^\alpha}{||z|^4-4|}$

D'après **a)**, $-1<\alpha<3$, d'où

iii) $\lim_{\epsilon\to 0}\left|\int_{\gamma_\epsilon} f(z)\,dz\right| \leqslant \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\pi\varepsilon^{\alpha+1}}{|\varepsilon^4-4|} = 0,$

iv) $\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \leqslant \lim_{R\to 0}\frac{\pi R^{\alpha+1}}{|R^4-4|} = 0.$

En résumé, on obtient en faisant tendre R vers $+\infty$ et ϵ vers 0

$$(1+e^{i(\alpha-1)\frac{\pi}{2}})\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2})^{\alpha-1}e^{i(\alpha-1)\frac{\pi}{4}}$$

d'où

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2})^{\alpha-1}\frac{e^{i(\alpha-1)\frac{\pi}{4}}}{1+e^{i(\alpha-1)\frac{\pi}{2}}} = \frac{\pi(\sqrt{2})^{\alpha-1}}{8\cos((\alpha-1)\frac{\pi}{4})}$$