Université de Rennes 1 | Master 1
Année 2009-2010 | ARCB

Examen terminal

Lundi 14 décembre 2009

Durée 2h

Documents et calculatrices interdits

Exercice 1.

1. Rappeler la définition du produit de convolution $f \star g$ où $f,g \in L^2([0,1])$.
2. Écrire les coefficients de Fourier $\widehat{f \star g}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, de $f \star g$ en fonctions de ceux de f et g.
3. Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+2in\pi x}$. Quels sont les coefficients de Fourier de g?
4. Montrer que l'équation $f + f \star g = g$ a une unique solution $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période 1.

Exercice 2. Soit $G = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,+\infty[$.
Pour tout nombre complexe a tel que $\mathfrak{Re}(a) < 0$, on définit la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par $f_a(x) = G(x)e^{ax}$.

(i) Montrer que f_a est intégrable et calculer sa transformée de Fourier $\widehat{f_a}$.

(ii) Soit b un nombre complexe tel que $\mathfrak{Re}(b) < 0$.
Montrer que $f_a \star f_b = \dfrac{f_a - f_b}{a - b}$.

(iii) Soit $c > 0$ et $F_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F_c(x) = 2c\, G(x) \sin(cx) e^{-cx}$.
Calculer la transformée de Fourier de F_c et vérifier que $\widehat{F_c}(0) = 1$.

Exercice 3.

1. La fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $u(x,y) = e^{-y}\cos(x)$ est-elle harmonique ?
   Déterminer la fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $\mathfrak{Re}(f) = u$ et $f(\pi) = -1$.
2. Soient Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ une fonction holomorphe telle que pour $z = x + iy \in \Omega$:
   $$|f(z)| = \phi(x)\psi(y)$$
   où ϕ et ψ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2.
   Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, b et $c \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = \exp(az^2 + bz + c)$.
   (Indication :on pourra considérer la fonction $\ln(f)$ où ln est la détermination principale du logarithme dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$)

Exercice 4. Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On note ln la détermination principale de la fonction logarithme dans Ω et pour $\alpha \in \mathbb{C}$, z^α la détermination correspondante de la fonction puissance sur Ω, i.e. $z^\alpha := e^{\alpha \ln z}$.

1) Montrer que pour $z \in \Omega$,

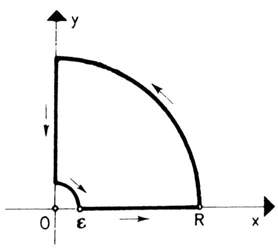
$$|z^\alpha| \leq |z|^{\mathfrak{Re}\alpha} e^{\pi |\mathfrak{Im}\alpha|}.$$

2) On supposera dans la suite que $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Pour quelles valeurs de α, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^4+4}\, dx$ est-elle convergente ?

b) On considère la fonction $f(z) = \frac{z^\alpha}{z^4+4}$. Déterminer les pôles de f .

c) Pour $R > \sqrt{2} > \epsilon > 0$, on considère le lacet $\gamma_{R,\epsilon}$ (parcouru dans le sens positif) constitué du segment de droite joignant ϵ à R, suivi du quart de cercle de centre 0 et de rayon R joignant R à iR, suivi du segment de droite joignant iR à $i\epsilon$, suivi du quart de cercle de centre 0 et de rayon ϵ joignant $i\epsilon$ à ϵ.



Calculer l'intégrale de f le long de $\gamma_{R,\epsilon}$.

d) En faisant tendre R vers $+\infty$ et ϵ vers 0, en déduire, pour les valeurs de α trouvées en **a)**,que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^4+4}\, dx = \frac{\pi(\sqrt{2})^{\alpha-1}}{8\cos((\alpha-1)\frac{\pi}{4})}.$$