Université de Rennes 1 | Master 1
Année 2009-2010 | ARCB

Contrôle continu $n^o 2$
corrigé

Exercice 1.

1. Soit ln la détermination principale de la fonction logarithme dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ c-à-d la fonction: $\ln : z \mapsto \ln |z| + iArg(z)$; où l'argument $Arg : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \mapsto]0, 2\pi[$. Par exemple, l'application de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$ $z \mapsto \ln |z| + i(Arg(z) + 2\pi)$. est une autre détermination dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

2. Comme $\lim_{n\to+\infty} 2^{-n} = 0$, par continuité $f(0) = 0$ et donc $z = 0$ est un zéro non-isolé. D'après le théorème des zéros isolés, f est nécessairement identiquement nulle dans le domaine $D(0, 1)$. Ainsi une fonction non-identiquement nulle vérifiant l'hypothèse n'existe pas.

3. La formule de Cauchy pour la dérivée première de la fonction $f(z) = \frac{1}{z+4}$, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \{4\})$, donne:
$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{(z-1)^2(z+4)} = Ind_{C(1;1)}(1).f'(1) = \left(\frac{1}{z+4}\right)'_{|z=1} = -\frac{1}{(1+4)^2} = -\frac{1}{25}.$$

4. On a $sinz = 0 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \Leftrightarrow 2iz \in 2ik\mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in \pi\mathbb{Z}$.

   Finalement les zéros de $\sin z$ sont tous réels, et de la forme $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Si une telle fonction existe, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{|f(z)|} \leqslant 2$, d'où la fonction entière $\frac{1}{f}$ est bornée et donc constante par le théorème de Liouville. Alors, une fonction non constante vérifiant l'hypothèse n'existe pas.

   (On peut aussi utiliser le fait: l'image de $\mathbb{C}$ par une fonction entière est dense dans $\mathbb{C}$)

Exercice 2.

1. On pose $f(z) = 6z^3$ et $g(z) = z^9 - 2z^5 - 2$. Pour $|z| = 1$, on a
$$|g(z)| \leqslant 1 + 2 + 2 = 5 < 6 = |f(z)|$$
   D'après le théorème de Rouché $f + g$ à autant de zéros dans $D(0, 1)$ que f, commme $z = 0$ est l'unique zéro de f, et il est de multiplicité 3, $P(z) = z^9 - 2z^5 + 6z^3 - 2 = f(z) + g(z)$ a exactement 3 racines dans le disque unité (comptées avec multiplicité)

2. Déterminer les points fixes de f dans $D(0,1)$ revient à déterminer les solutions de $f(x)-x = 0$ dans $D(0,1)$. Soit g l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto -x$. L'hypothèse sur f entraîne :

   si $|z| = 1$ alors $|f(z)| < 1 = |g(z)|$

   D'après le théorème de Rouché $f+g$ à autant de zéros dans $D(0,1)$ que g, comme g a un seul zéro (et il est simple), $f+g$ n'aura qu'une racine dans $D(0,1)$, donc f a un unique point fixe dans $D(0,1)$.

Exercice 3.

1. Si $f = P + iQ$ on a $\Delta(|f|^2) = \Delta(P^2+Q^2) = \Delta(P^2) + \Delta(Q^2)$
   $= 2\left(\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right) + 2P\Delta(P) + 2\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2\right) + 2Q\Delta(Q)$
   $= 2\left(\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right) + 2\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2\right) = 2|f'|^2 + 2|f'|^2 = 4|f'|^2.$

2. $|f_1|^2 + \ldots + |f_k|^2$ soit constante entraîne que $0 = \Delta(|f_1|^2 + \ldots + |f_k|^2) = \Delta|f_1|^2 + \ldots + \Delta|f_k|^2 = 4|f_1'|^2 + \ldots + 4|f_k'|^2$, d'où pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $f_i' \equiv 0$, comme Ω est connexe, ceci entraîne que f_i est constante.

Exercice 4.

1. Par hypothèse il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f| = k$ sur $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$.

   Si $k = 0$, d'après le principe du maximum $|f| \leqslant 0$ dans Ω, est identiquement nulle.
   On peut donc supposer $k > 0$. Si f ne s'annulait pas dans Ω,

   la fonction $g = \frac{1}{f}$ serait un élément de $\mathcal{H}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et le principe du maximum appliqué à g donnerait $\frac{1}{|f|} = |g| \leqslant \frac{1}{k}$ sur Ω, d'où $k \leqslant |f| \leqslant k$ sur Ω, c-à-d $|f|$ est constante égale à k sur Ω, ou encore que $f(\Omega) \subset \{z \in \mathbb{C}; |z| = k\}$, donc l'image de f n'est pas un ouvert de $\mathbb{C}$, et le théorème de l'application ouverte permet d'affirmer que f est constante, ce qui contredit l'hypothèse sur f.

   (On peut aussi montrer directement, en utilisant les équations de Cauchy-Riemann, que $|f|$ constante entraîne que f' identiquement nulle).

2. Soient P un polynôme de degré $n \geqslant 1$ et a un réel.
   Montrer que l'ouvert $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| < a\}$ a au plus n composantes connexes.

   Si $a \leqslant 0$, alors Ω_a est vide. On peut donc supposer $a > 0$

   Comme sur $\partial\Omega_a = \overline{\Omega}_a \setminus \Omega_a$, $|P| = a$, d'après 1), P a nécessairement un zéro dans chaque composante connexe de Ω_a, donc le nombre de composante est au plus égal au nombre de racines distinctes de P et comme un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes, Ω_a aura au plus n composantes connexes.