Université de Rennes 1 — Master 1
Année 2011-2012 — ARCB Analyse réelle et complexe de base

Contrôle continu $n^o 2$
Lundi 21 novembre 2011
Durée 1h

Documents et calculatrices interdits

Exercice 1. Soit l'espace de Hilbert $L^2([0,2\pi])$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \sin(nx)$.

1. Soit $0 \leq a < b \leq 2\pi$, et $g_{a,b} = \mathbb{1}_{[a,b]}$.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle f_n, g_{a,b}\rangle = 0$.
   En déduire que pour tout $g \in L^2([0,2\pi])$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle f_n, g\rangle = 0$
2. Soit $0 \leq a < b \leq 2\pi$, et $g = \mathbb{1}_{[a,b]}$.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle f_n^2, g\rangle = \langle \frac{1}{2}, g\rangle$.
3. Déduire qu'aucune sous-suite de f_n ne converge presque partout vers 0.

Exercice 2.

1. Pour $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de $g_a = \mathbb{1}_{[-a,a]}$.
2. Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f. Pour $g \in L^2(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{F}(g)$ la transformée de Fourier-Plancherel de g.
   Soit $f,g \in L^2(\mathbb{R})$. Parmi les deux formules suivantes, laquelle peut avoir un sens ?
   $\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(fg)$ ou $\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) = \widehat{fg}$. Justifier brièvement votre réponse.
3. Pour $a > 0$, on pose $f_a(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi a x)}{\pi x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
   Montrer que $f_a \in L^2(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$.
   Pour $a,b > 0$, déterminer $f_a * f_b$.
   (On pourra utiliser 1) et 2))
4. Montrer que l'équation $f * f = f$ admet une infinité de solutions dans $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 3.

Soit $f(z) = az^2 + bz\bar{z} + c\bar{z}^2$, où a,b et c sont des nombres complexes fixés.

1. Montrer que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z si et seulement si $bz + 2c\bar{z} = 0$
2. Déterminer l'ensemble des points où f est holomorphe ?