Université de Rennes 1 | Master 1
Année 2010-2011 | ARCB Analyse réelle et complexe de base

Contrôle continu $n^o 2$

mardi 30 novembre 2010

Durée 1h

Documents et calculatrices interdits

Exercice 1. [11pts]

1. Soit $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$.
   Montrer que $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ est holomorphe dans $D(0,1)$.
2. Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Expliciter deux déterminations de la fonction racine $z^{\frac{1}{2}}$ dans Ω.
3. Déterminer le nombre de racines (comptés avec leur multiplicité) de $e^z - 4z^3 + 1 = 0$ dans le disque $|z| < 1$.
   Faire de même pour la couronne $1 < |z| < 2$.
4. Existe-t-il une fonction entière non constante f, telle que $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$?
   (Ind : on pourra considérer le signe de la partie imaginaire de f)

Exercice 2. [4pts]

1. Montrer que la fonction $f : D(0,3) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \dfrac{z}{e^z - 1}$ admet un prolongement en une fonction holomorphe sur $D(0,3)$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{1}{z(e^z - 1)}\, dz$.

Exercice 3. [5pts]

1. Soit A un ensemble discret de $\mathbb{C}$. Soit $h : \mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $M > 0$ telle que $|h(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus A$.
   Montrer que h est constante.
2. Soient f et g deux fonctions entières telles que pour tout $z \in \mathbb{C}$:
   $$|g(z)| \leq |f(z)|.$$
   Montrer qu'il existe une constante c telle que $g = cf$.